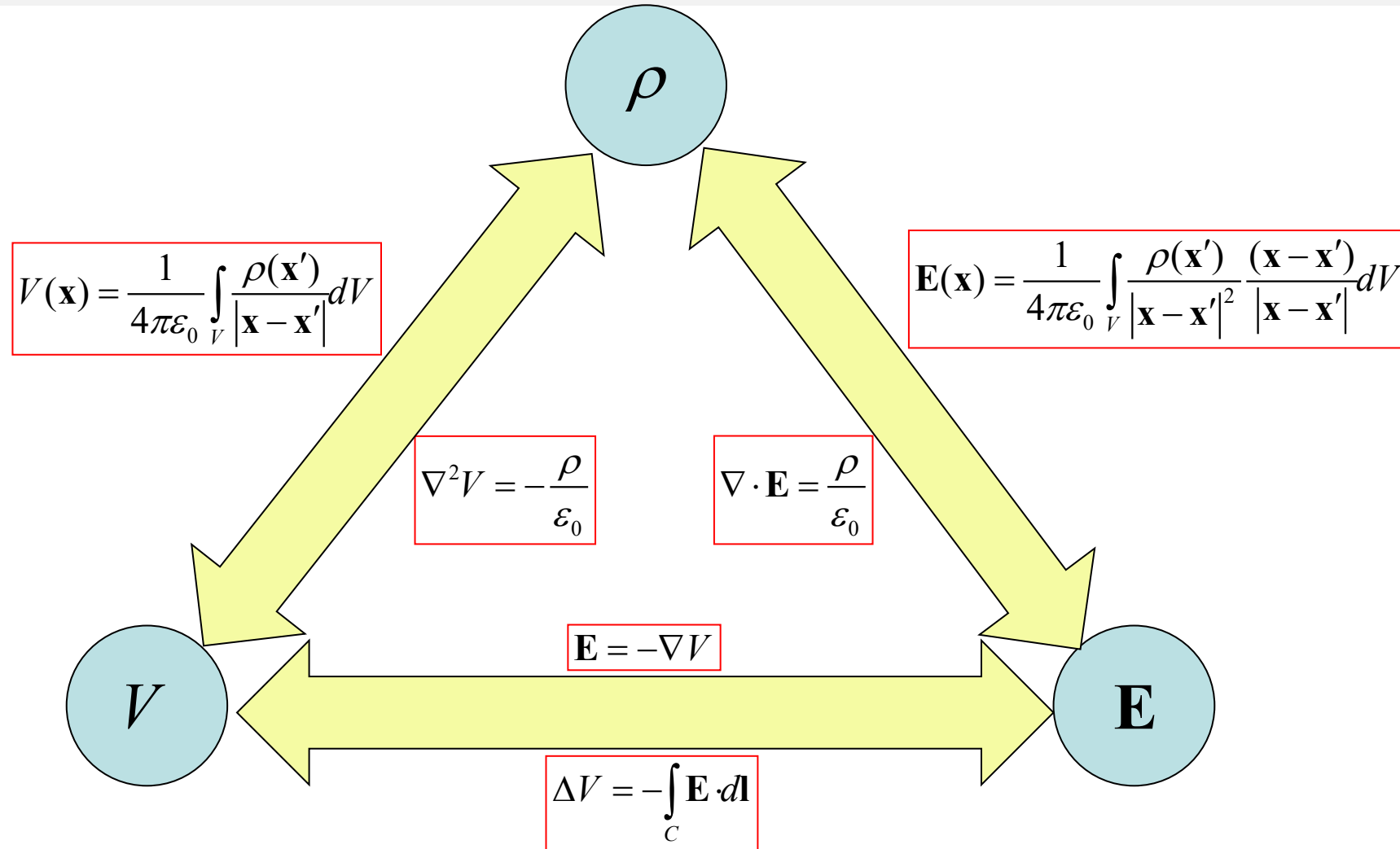


Semaine 5:
Electrostatique 1

Résumé de l'électrostatique



Note: L'électrostatique peut être divisé en:

Problèmes de sommation: la densité de charge est spécifiée à chaque point de l'espace et le problème de trouver le champ électrique se réduit à effectuer une intégrale.

Problèmes de valeur limite: la densité de charge ne peut pas être spécifiée une fois pour toutes à chaque point de l'espace. Cela se produit lorsque la matière est présente car la force de Lorentz induit la redistribution de la densité de charge à l'intérieur de la matière jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Le champ électrique peut être déterminé de manière unique partout, à condition de spécifier un modèle de la matière (comportement du champ électrique à l'intérieur de la matière) et les conditions au bord pour les équations différentielles de Maxwell.

Electrostatique et Magnétostatique:

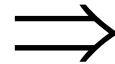
Définition

Définition de la condition électrostatique/magnétostatique

La densité de charge ρ est indépendante du temps.

La densité de courant \mathbf{J} est indépendante du temps.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \forall t$$



Electrostatique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{E} &= -\nabla V \\ V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \end{aligned}$$

Magnétostatique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \end{aligned}$$

Note:

Conservation de la charge: $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

En regime "statique": $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

\Rightarrow

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

Electrostatique et Magnétostatique:

Démonstration à partir de la définition

En général (électrodynamique)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Definition de la condition électrostatique/magnétostatique:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \forall t$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV = 0$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Electrostatique et Magnétostatique: deux problèmes «découplés» ?

Electrodynamique

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

B et E sont «couplés»

Electrostatique

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

Magnétostatique

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

B et E sont «découplés»
(mais un couplage «caché» existe,
voir plus tard dans le cours)

Le potentiel électrique dans le cas statique

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Note:

Cette équation est valable si nous choisissons comme point de référence avec potentiel $V=0$ l'infini et si la densité de charge à l'infini est égale à zéro.
(voir plus loin dans le cours)

Démonstration:

$$\text{En générale: } V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

⇒

$$\text{Dans le cas statique: } V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Le champ électrique dans le cas statique

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Démonstration:

En générale: $V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$ et $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial t}$

⇒

Dans le cas statique: $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$ et $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$

Math: $\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$

⇒

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Note:
 Potentiel électrique statique $dV(\mathbf{x})$ et champ électrique statique $d\mathbf{E}(\mathbf{x})$ créés par une charge infinitésimale $dq(\mathbf{x}')$:

$$dq(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}')dV \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r \quad \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \hat{\mathbf{r}}$$

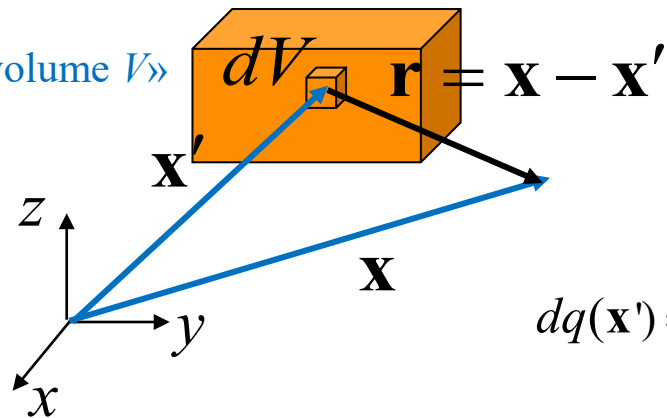
$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \quad \Rightarrow \quad dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{r}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Attention: Problème de notation:

dV : volume infinitésimal $dV(\mathbf{x})$: potentiel dû à $dq(\mathbf{x}')$ en \mathbf{x} .

Charges

«dans le volume V »

$$dq(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{r}')dV$$

ρ : Densité de charge «volumique» (C/m³)

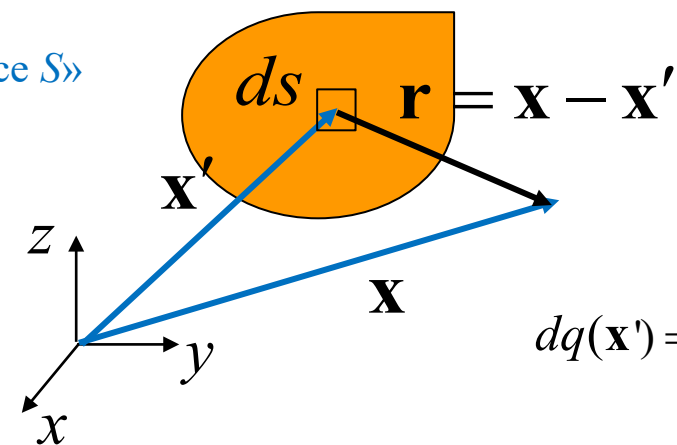
$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

Charges

«sur la surface S »

$$dq(\mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{r}')ds$$

σ : Densité de charge «surfactive» (C/m²)

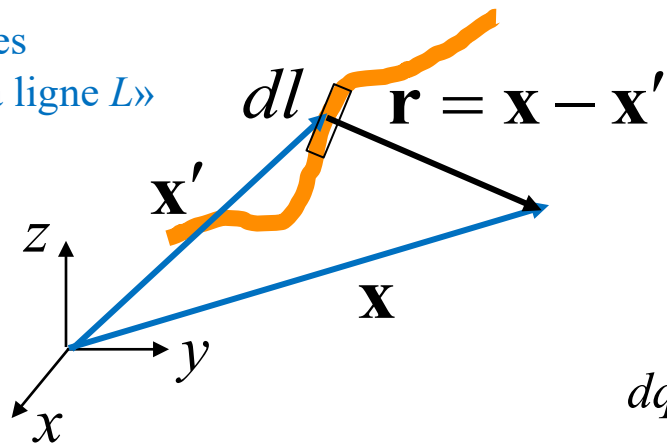
$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ds$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ds$$

$$dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ds$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} ds$$

Charges
«sur la ligne L »



$$dq(\mathbf{x}') = \lambda(\mathbf{x}') dl$$

λ : Densité de charge «linéique» (C/m)

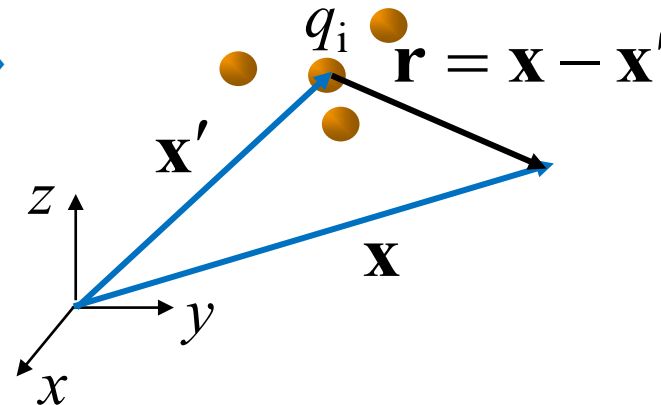
$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dl$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dl$$

$$dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dl$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dl$$

Charges
«isolées»



$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$

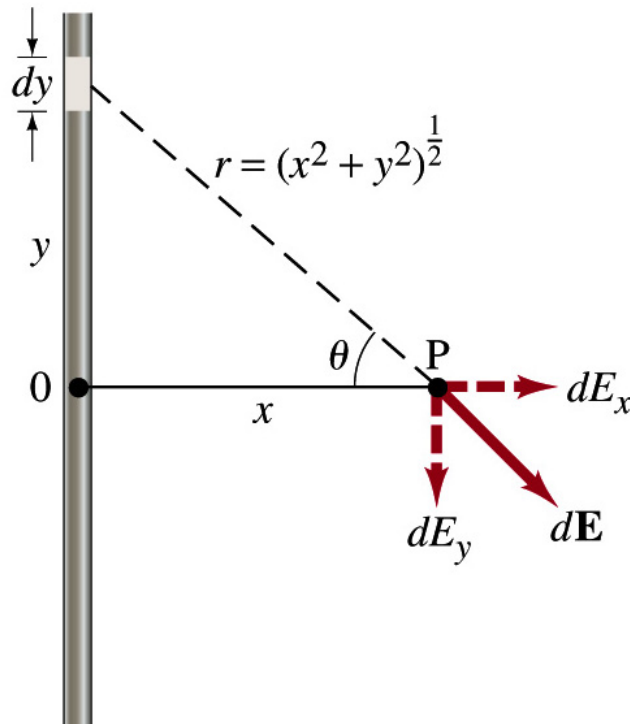
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$

$$dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Exemple: Champ E produit par un fil infini uniformément chargé

λ : densité de charge linéique (C/m)



Voir plus tard solution plus simple avec loi de Gauss.

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow dE_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2} \cos\theta$$

$$y = x \tan\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} x \tan\theta = x \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow dy = x \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = x(1 + \tan^2\theta) d\theta \Rightarrow$$

$$dE_x(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{x^2(1 + \tan^2\theta)} x(1 + \tan^2\theta) d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \cos\theta d\theta$$

de la même manière:

$$dE_y(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \sin\theta d\theta$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} E_x(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \\ E_y(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E}(x, 0, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \hat{\mathbf{x}}$$

Potentiel électrique et champ électrique

En conditions électrostatiques:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Nous pouvons calculer le potentiel électrique V à partir de la densité de charge. Dans le cas électrostatique, il peut également être calculé à partir du champ électrique \mathbf{E} .

Démonstration:

$$\text{En général: } \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \text{En condition électrostatiques: } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} -\nabla V \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Notes:

1) Le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ est souvent indiqué aussi par $\Phi(\mathbf{r})$ ou $\varphi(\mathbf{r})$.

2) Le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ est une fonction scalaire continue définie à une constante près $V(\mathbf{r}_0)$. En supposant $V(\mathbf{r}_0) = 0 \Rightarrow V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

3) Attention: le choix $V(\mathbf{r}=\infty)=0$ n'est pas possible si la densité de charge à l'infini est non nulle (par ex.: fil infini chargé; plan infini chargé,...)

Si le système de charge réel peut être approximé par un système de charge situé dans une zone plus ou moins grande de l'espace, alors nous pouvons considérer que le potentiel à l'infini est nul. Cependant, il existe des situations où le système de charges peut être approximé (pour simplifier les calculs) par une distribution de charges s'étendant à l'infini (plan infini chargé, fil infini chargé, ..). Dans un tel cas, nous ne pouvons pas considérer que le potentiel à l'infini est nul.

Le champ \mathbf{E} statique est «conservatif»: démonstration

Definitions équivalentes de champ conservatif:

1) Un champ vectoriel \mathbf{F} est dit conservatif

si et seulement si sa circulation sur toute courbe fermée est nulle

(i.e., \mathbf{F} est conservatif $\Leftrightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \forall C$)

2) Un champ vectoriel \mathbf{F} (dans un domaine simplement connexe) est dit conservatif

si et seulement si \mathbf{F} est irrotationnel.

(i.e., \mathbf{F} est conservatif $\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \forall \mathbf{x}$)

3) Un champ vectoriel \mathbf{F} est dit conservatif

si et seulement s'il existe un champ scalaire V tel que $\mathbf{F} = \nabla V \quad \forall \mathbf{x}$

(i.e., \mathbf{F} est conservatif $\Leftrightarrow \mathbf{F} = \nabla V \quad \forall \mathbf{x}$)

Démonstration:

Equation de Maxwell (forme intégrale): $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ est conservatif

Autre démonstration:

Equation de Maxwell (forme différentielle): $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Conditions statiques: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}$ est conservatif

Intégrale de ligne d'un champ vectoriel et scalaire (math.)

Note 1:

L'intégrale de ligne d'un champ **vectoriel** $\mathbf{F} = a(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + b(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + c(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$ est:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

L'intégrale de ligne d'un champ **scalaire** $F = a(x, y, z)$ est:

$$\int_C F dl = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} F dl = \int_{t_1}^{t_2} F(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

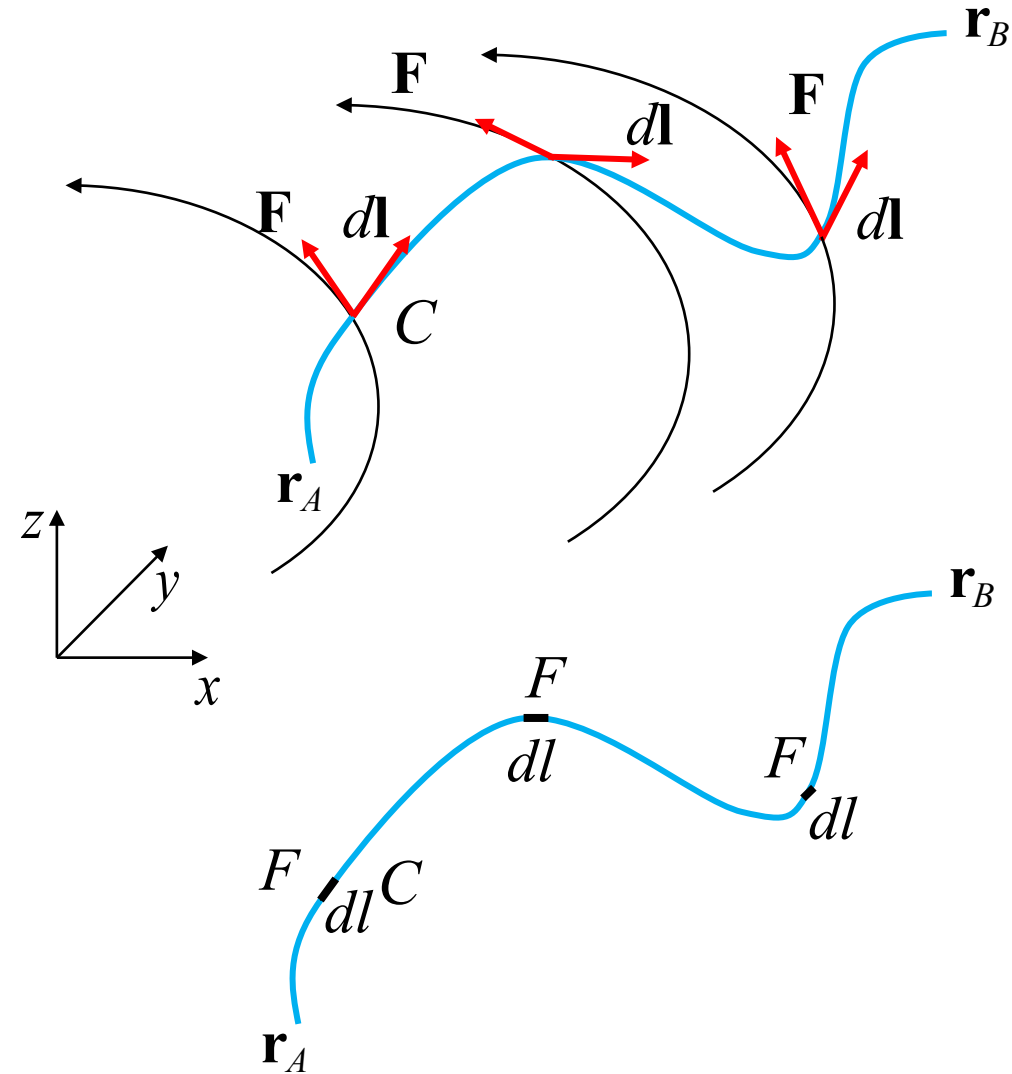
$\mathbf{r}(t)$: parametrization de la ligne C avec le parametre t (t n'est pas le temps)

avec conditions $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_A$ et $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_B$ et $t_1 < t_2$

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\hat{\mathbf{x}} + g(t)\hat{\mathbf{y}} + h(t)\hat{\mathbf{z}} \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = a(t)\hat{\mathbf{x}} + b(t)\hat{\mathbf{y}} + c(t)\hat{\mathbf{z}}$$

$$F(\mathbf{r}(t)) = a(t)$$



Note 2:

Pour $\mathbf{F} = (a(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + b(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + c(x, y, z)\hat{\mathbf{z}})$,

l'intégrale de ligne est aussi:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \{a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz\}$$

Connaissant l'expression du chemin C , chaque terme de l'intégrale

doit être exprimé en termes de l'un des variables x , y , z

ou en termes d'un paramètre t . Cela rend l'intégration (en dx ou dy ou dz ou dt) possible.

Attention, en general:

$$\int_C \{a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz\} \neq \int_{x_a}^{x_b} a(x, y, z)dx + \int_{y_a}^{y_b} b(x, y, z)dy + \int_{z_a}^{z_b} c(x, y, z)dz$$

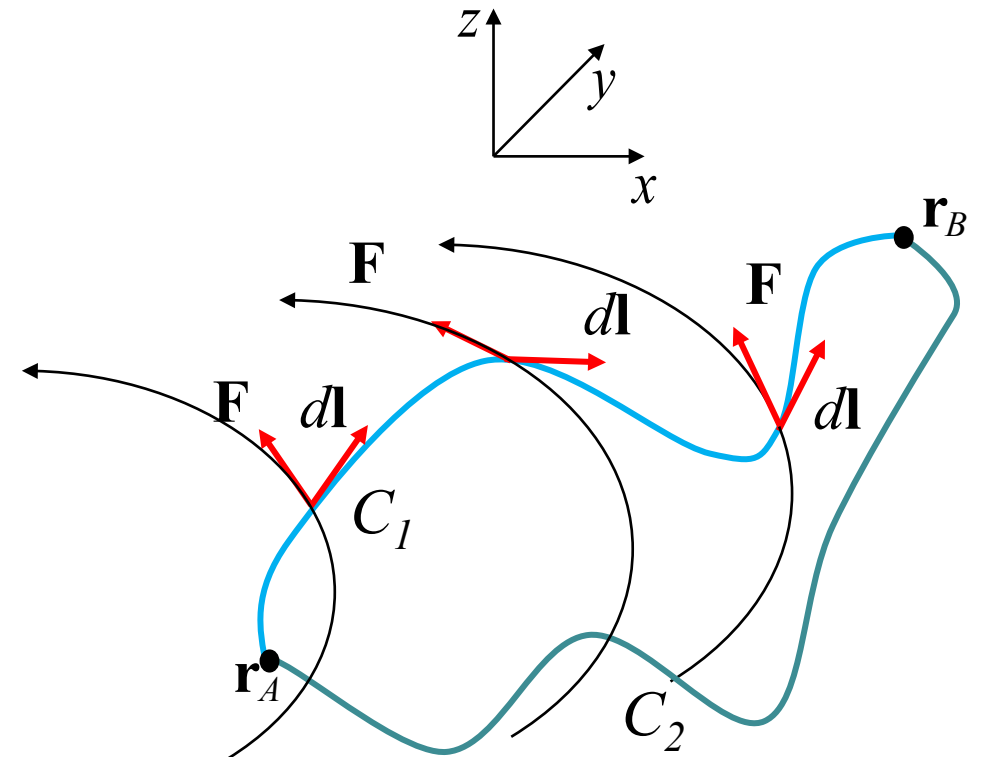
Note 3:

Si \mathbf{F} est conservatif $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ ne dépend pas du chemin d'intégration:

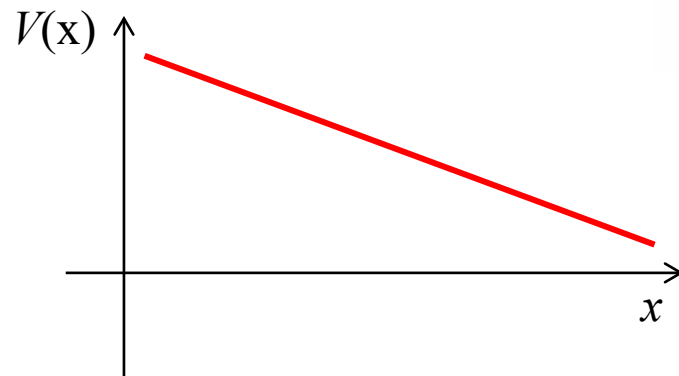
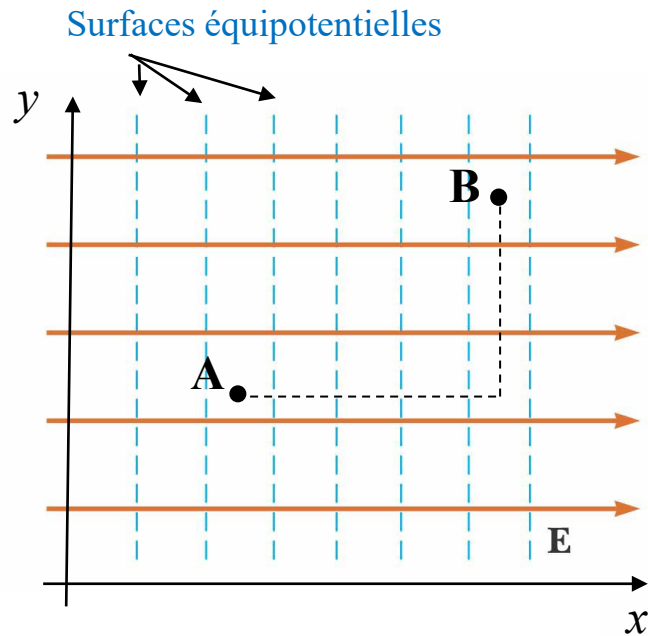
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \dots \quad \forall C_i \text{ de } \mathbf{r}_A \text{ à } \mathbf{r}_B$$

(mais évidemment ça peut dépendre

du point de départ \mathbf{r}_A et du point d'arrivée \mathbf{r}_B)



Exemple: Potentiel électrique pour un champ électrique statique uniforme



$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_0 \hat{\mathbf{x}}$$

\Rightarrow

$$V(\mathbf{r}_B) = V(\mathbf{r}_A) - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{r}_A) - \int_{x_A, y_A}^{x_B, y_A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} - \int_{x_B, y_A}^{x_B, y_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{y}$$

$$\int_{x_A, y_A}^{x_B, y_A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = E_0(x_B - x_A) \quad \int_{x_B, y_A}^{x_B, y_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{y} = 0 \quad (\mathbf{E} \perp d\mathbf{y})$$

\Rightarrow

$$V(\mathbf{r}_A) - V(\mathbf{r}_B) = E_0(x_B - x_A)$$

Note 1:

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{t_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) = (E_0, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}(t) = \left(x_A + \frac{x_B - x_A}{t_2} t, y_A + \frac{y_B - y_A}{t_2} t, 0\right) \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{x_B - x_A}{t_2}, \frac{y_B - y_A}{t_2}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \left(E_0 \frac{x_B - x_A}{t_2}, 0, 0\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^{t_2} E_0 \frac{x_B - x_A}{t_2} dt = E_0(x_B - x_A)$$

La loi de Coulomb: en général

La force de Lorentz totale exercée sur une distribution de charge $\rho^*(\mathbf{x})$ contenue dans le volume V^* est:

$$\mathbf{F} = \int_{V^*} (\rho^*(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})) dV^*$$

pour $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$ et/ou $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$

\Rightarrow

$$\mathbf{F} = \int_{V^*} \rho^*(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV^*$$

Dans le cas statique, le champ électrique créé par la distribution de charge $\rho(\mathbf{x}')$ contenue dans le volume V est:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

\Rightarrow

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V^*} \rho^*(\mathbf{x}) dV^* \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

**Loi de Coulomb
(en général)**

\mathbf{F} est la force totale que $\rho(\mathbf{x})$ exerce sur $\rho^*(\mathbf{x})$.

La force totale \mathbf{F}^* que $\rho^*(\mathbf{x})$ s'exerce sur $\rho(\mathbf{x})$ est $\mathbf{F}^* = -\mathbf{F}$.

Par conséquent, la force totale qu'une distribution de charge exerce sur elle-même est zéro.

La loi de Coulomb pour deux charges

Force sur une charge q_1 due à une charge q_2 au repos à une distance r :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

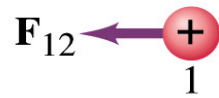
**Loi de Coulomb
(pour deux charges)**

Permittivité du vide:

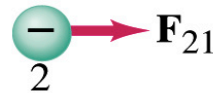
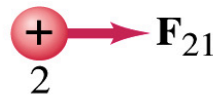
$$\epsilon_0 \cong 8.8 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

F_{12} = force on 1
due to 2

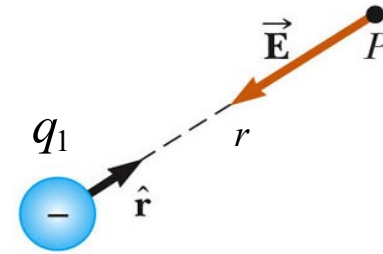
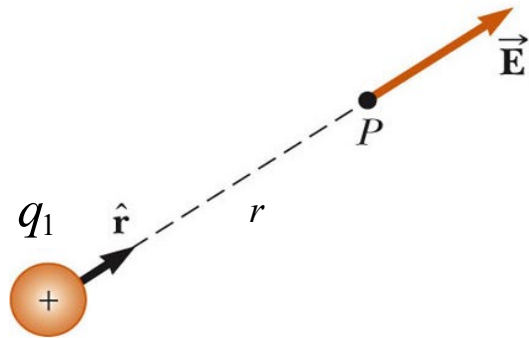


F_{21} = force on 2
due to 1



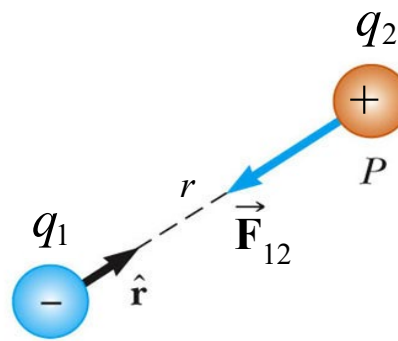
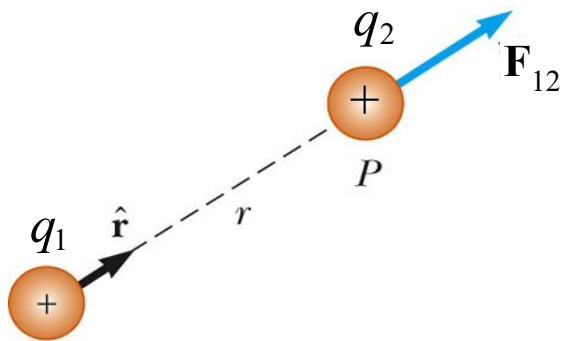
$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



Champ \mathbf{E} 

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

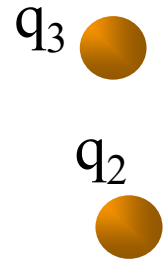
Champ électrique produit par la charge q_1 au point P .
Le point P est à la distance r de la charge q_1 .

Force \mathbf{F} 

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Force exercée sur la charge q_2 située au point P
par le champ électrique produit par la charge q_1 .
Le point P est à la distance r de la charge q_1 .

Force et champ électrique: superposition



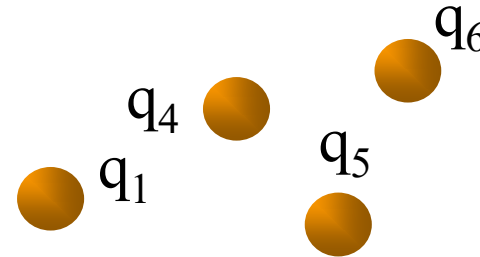
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} = q_1 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

⇒

$$\mathbf{F} = \sum_{i=2\dots n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_1}{r_{1i}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1i} = q_1 \sum_{i=2\dots n} \mathbf{E}_i = q_1 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=2\dots n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{1i}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1i} = \sum_{i=2\dots n} \mathbf{E}_i$$



Force sur q_1 en raison
du champ \mathbf{E} produit par q_2

Champ \mathbf{E} sur q_1 produit par q_2

Force sur q_1 en raison
du champ \mathbf{E} produit par $q_2, q_3, q_4, \dots, q_n$

Champ \mathbf{E} sur q_1 en raison
du champ \mathbf{E} produit par $q_2, q_3, q_4, \dots, q_n$

Force électrostatique vs force gravitationnelle

Force **gravitationnelle** entre deux **masses**

$$\mathbf{F} = G_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Attractive

Un seul type de masse (positive)

$$G_G \cong 7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Force **électrostatique** entre deux **charges**

$$\mathbf{F} = G_C \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Attractive ou répulsive

Deux types de charges (positive ou négative)

$$G_C \cong 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$$

Exemple 1: Force entre un électron et un proton

$$m_p \cong 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad q_p \cong 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e \cong 9 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad q_e \cong -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{électrostatique}}}{\mathbf{F}_{\text{gravitation}}} = \frac{G_C}{G_G} \frac{q_e q_p}{m_e m_p} \cong 10^{39} \text{ (à toutes distances)}$$

(la force électrostatique est dominante)

Exemple 2: Force entre la terre et le soleil

$$m_t \cong 6 \times 10^{24} \text{ kg} \quad q_t \cong -10 \text{ C (?)}$$

$$m_s \cong 2 \times 10^{30} \text{ kg} \quad q_s \cong +100 \text{ C (?)}$$

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{électrostatique}}}{\mathbf{F}_{\text{gravitation}}} = \frac{G_C}{G_G} \frac{q_t q_s}{m_t m_s} \cong 10^{-32} \text{ (à toutes distances)}$$

(la force gravitationnelle est dominante)

La loi de Coulomb pour deux charges: «démonstrations»

1. Avec équation générale de la force de Coulomb

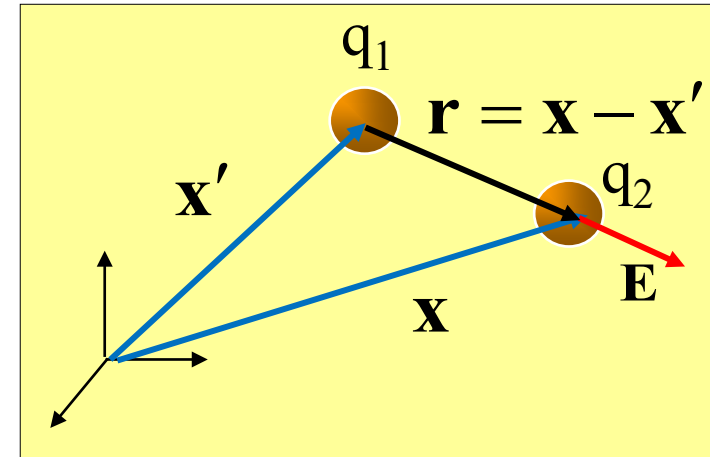
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V^*} dV^* \int_V \rho^*(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

supposent

$$\rho(\mathbf{x}') = q_1 \delta(\mathbf{x}') \quad \rho^*(\mathbf{x}) = q_2 \delta(\mathbf{x})$$

⇒

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



2. Avec potentielle électrique et force de Lorentz

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \Rightarrow$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{F} = q_2 \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

3. Avec équations de Maxwell et force de Lorentz

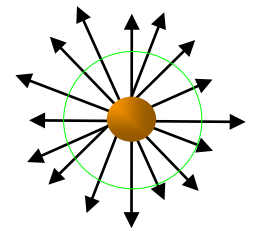
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

symétrie: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{r}}$

(coor. sphér.)

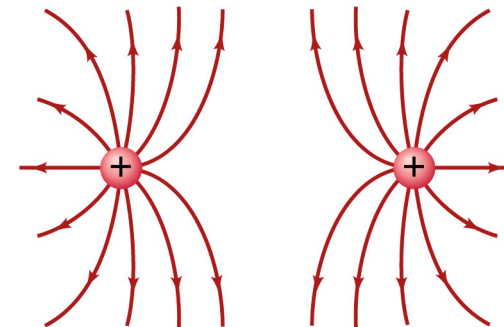
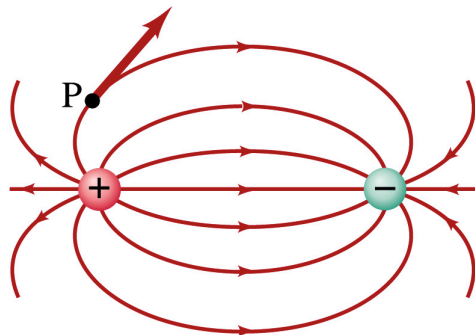
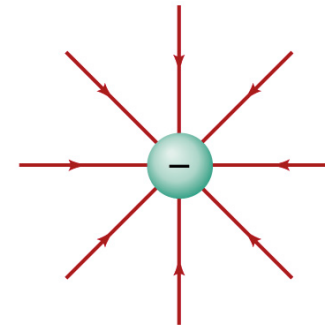
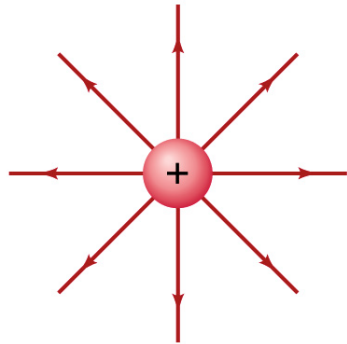
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E \Rightarrow$$

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{F} = q_2 \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

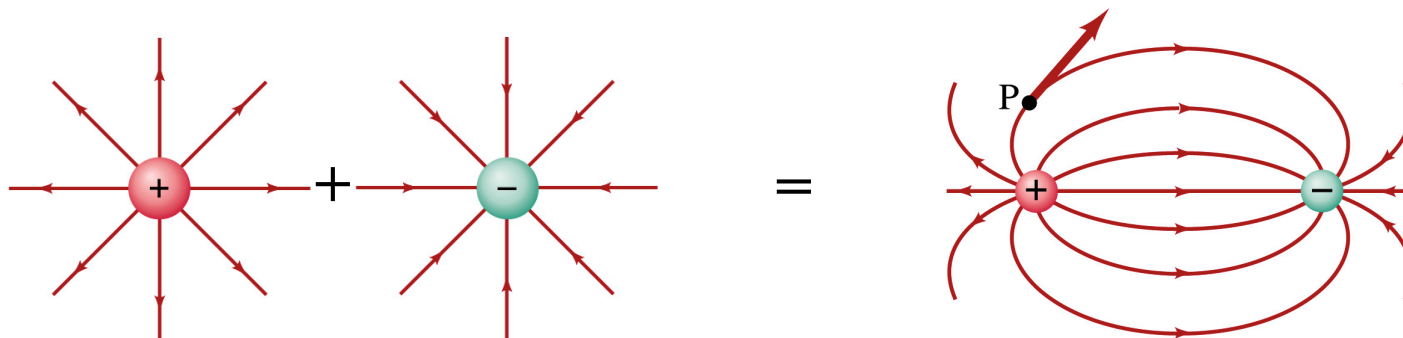


Les «lignes de champ» (aussi «lignes de force») du champ \mathbf{E}

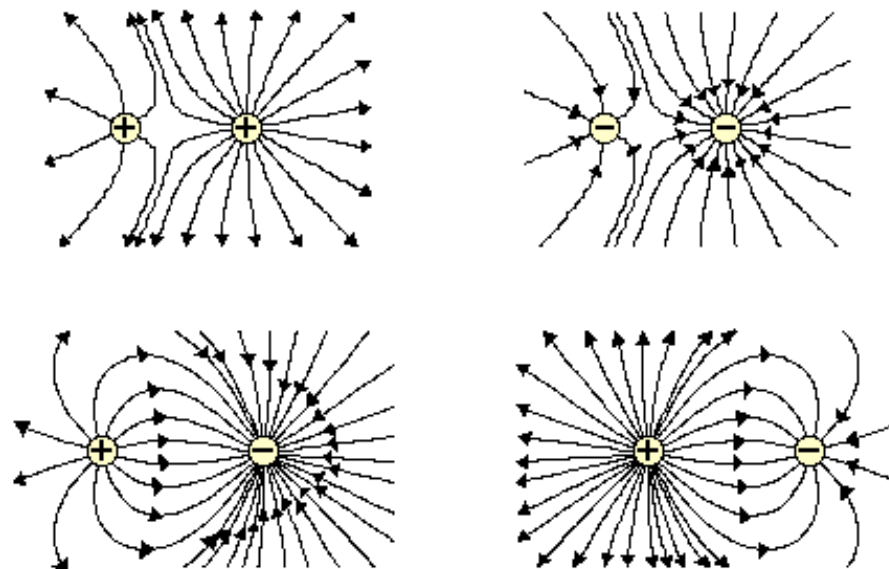
1. Elles sont tangentes en chaque point au vecteur champ \mathbf{E}
2. Ne se croisent jamais
3. La densité des lignes (nombre de lignes qui traversent une surface unitaire) est proportionnelle à l'intensité du champ \mathbf{E}



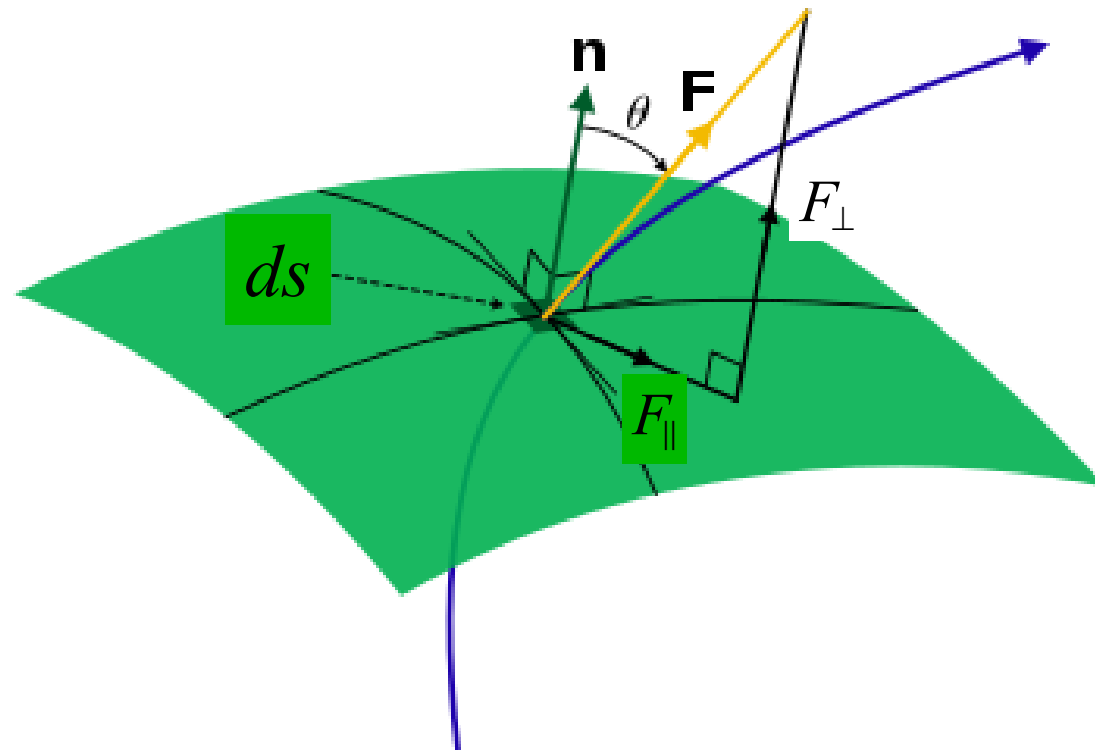
Note 1: Le principe de superposition n'est pas «manifeste» lorsqu'on utilise la représentation des lignes de champ. On ne superpose pas les lignes de champ. On calcule le champ total et on dessine les lignes du champ total.



Note 2: Lignes de champ électrique pour des objets ayant une quantité inégale de charge.



Flux d'un champ vectoriel \mathbf{F} à travers une surface S : définition



Flux de \mathbf{F} à travers S :
$$\Phi_F = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_S F \cos \theta ds = \int_S F_{\perp} ds$$

Loi de Gauss

Forme intégrale (globale)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = Q / \epsilon_0$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_f dV = Q_f$$

"Le flux du champ électrique \mathbf{E} à travers une surface S fermée est égal à la somme des **charges libres et liés** Q contenues dans le volume V délimité par cette surface divisée par ϵ_0 "

"Le flux du champ électrique \mathbf{D} à travers une surface S fermée est égal à la somme des **charges libres** Q_f contenues dans le volume V délimité par cette surface"

Forme différentielle (locale)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

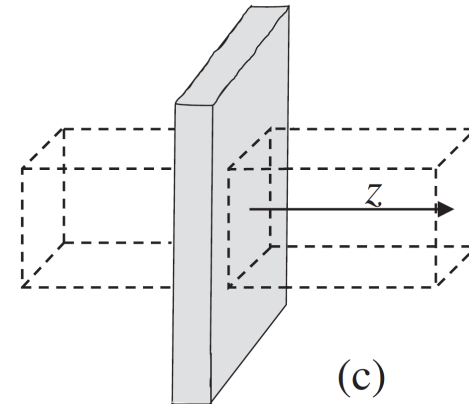
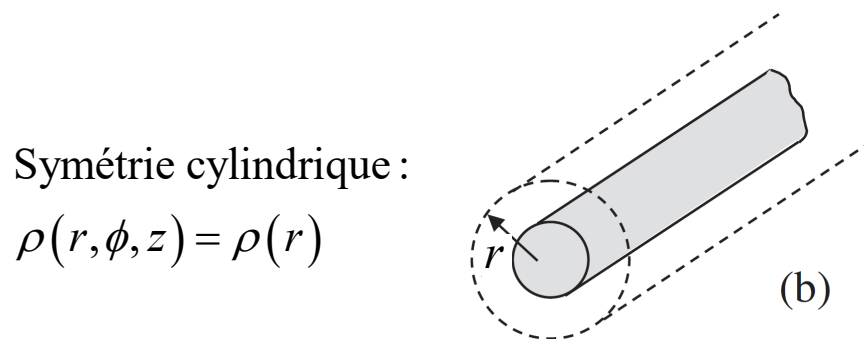
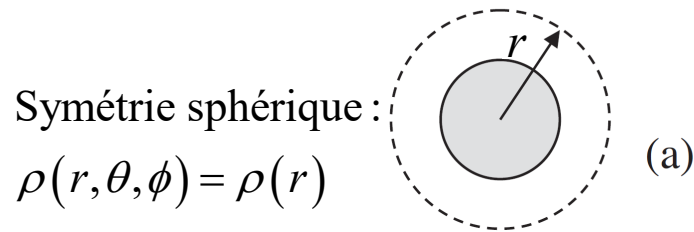
Rappel: La loi de Gauss est l'une des équations de Maxwell.

ρ_f : densité des charges libres
 ρ : densité des charge totale

Loi de Gauss: l'importance de la symétrie

La loi de Gauss est toujours valable (c'est une des équations de Maxwell), mais pour être appliqué analytiquement de manière simple nécessite que le problème envisagé soit de symétrie «élevée».

L'invariance d'une distribution de charge aux «symétries spatiales» comme la rotation, la translation et la réflexion dans un plan est une condition essentielle pour utiliser la loi de Gauss pour le calcul simple du champ électrique.



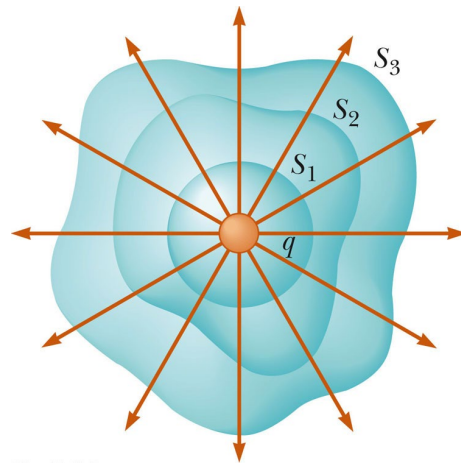
Symétrie planaire :

$$\rho(x, y, z) = \rho(z)$$

Les zones ombrées sont des distributions hautement symétriques de la charge. Les lignes en pointillés décrivent les choix possibles pour les surfaces gaussiennes (surfaces d'intégration)

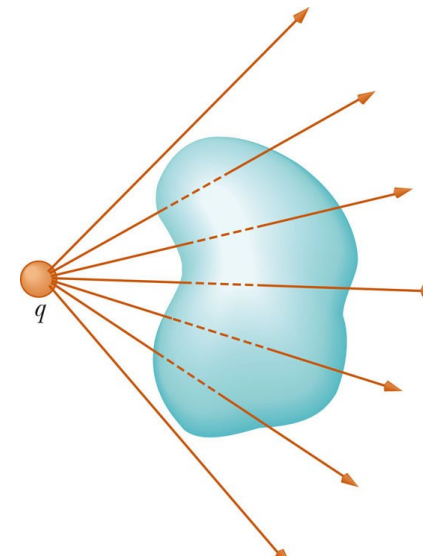
Notes:

1. La loi de Gauss en forme intégrale, lorsque la **symétrie** le permet, constitue le moyen le plus rapide et le plus facile de calculer le champ électrique.
2. La loi de Gauss est toujours vraie mais pas toujours utile. S'il n'y a pas de symétrie, cela ne peut pas être facilement appliqué.
3. Le flux de \mathbf{E} ne dépend ni de la forme de la surface ni de la position de q à l'intérieur de la surface fermée.



$$\begin{aligned}\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$



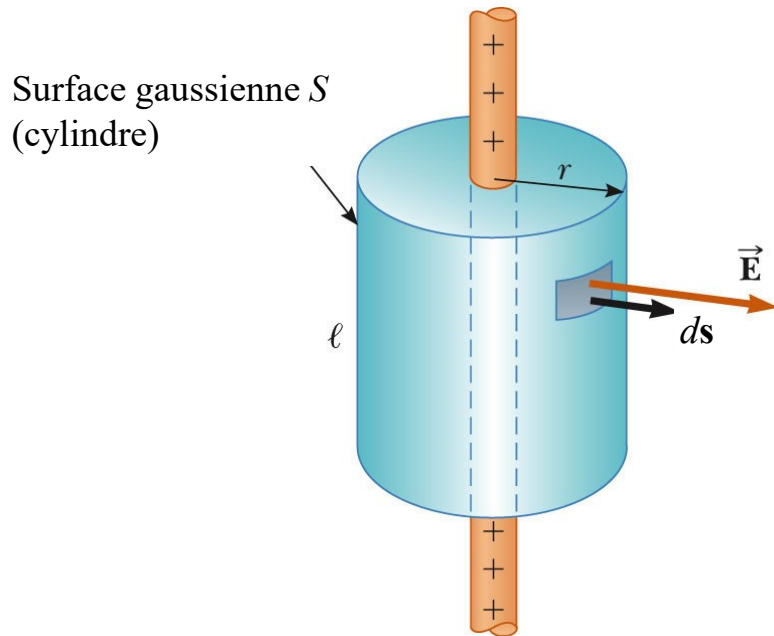
$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = 0$$

4. La loi de Gauss est valable même pour des charges en mouvement (c'est l'une des quatre équations de Maxwell)

Exercices: Application de la loi de Gauss

1. Fil mince infini uniformément chargé

λ : densité de charge linéique [C/m]



La symétrie du problème
permet de déterminer «intuitivement»
la direction du champ \mathbf{E}

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (\hat{\mathbf{r}} \text{ en coord. cylindriques})$$

\Rightarrow

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_{top}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_{bottom}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_{lateral}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\text{Sur } S_{top} : \mathbf{E} \perp d\mathbf{s} \Rightarrow \int_{S_{top}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\text{Sur } S_{bottom} : \mathbf{E} \perp d\mathbf{s} \Rightarrow \int_{S_{bottom}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

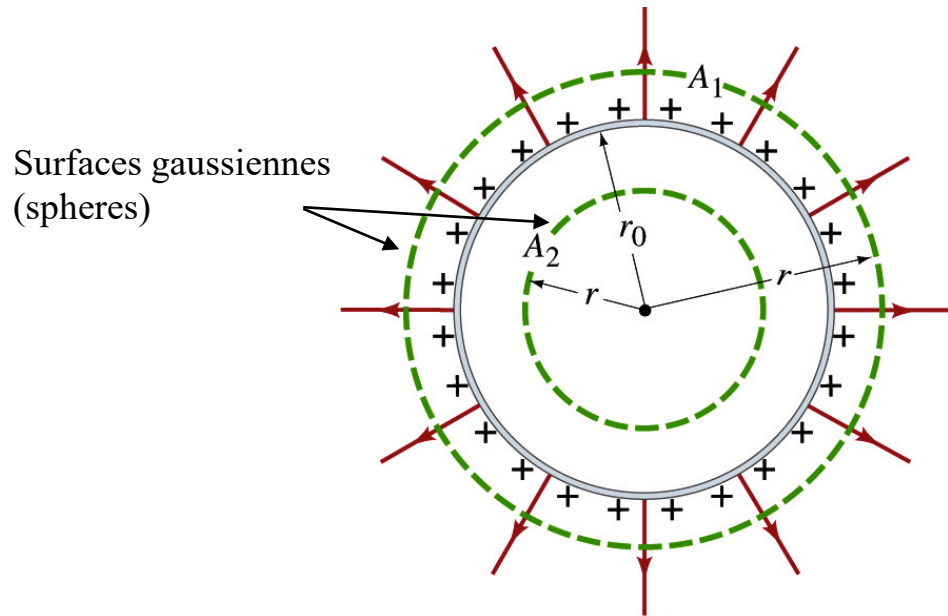
$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_{lateral}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r l E(r)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2\pi r l E(r) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

2. Coquille sphérique uniformément chargée



Q : charge totale sur la coquille sphérique [C]

σ : densité de charge de surface [C/m²]

$$Q = \sigma A_{r_0} = \sigma 4\pi r_0^2$$

La symétrie du problème permet de déterminer «intuitivement» la direction du champ \mathbf{E}

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

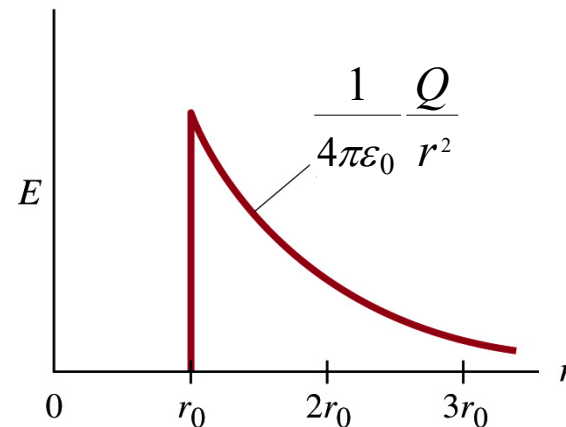
$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (\hat{\mathbf{r}} \text{ en coord. sphériques})$$

$$r < r_0 : \quad \oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E(r) \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \rho dV = 0$$

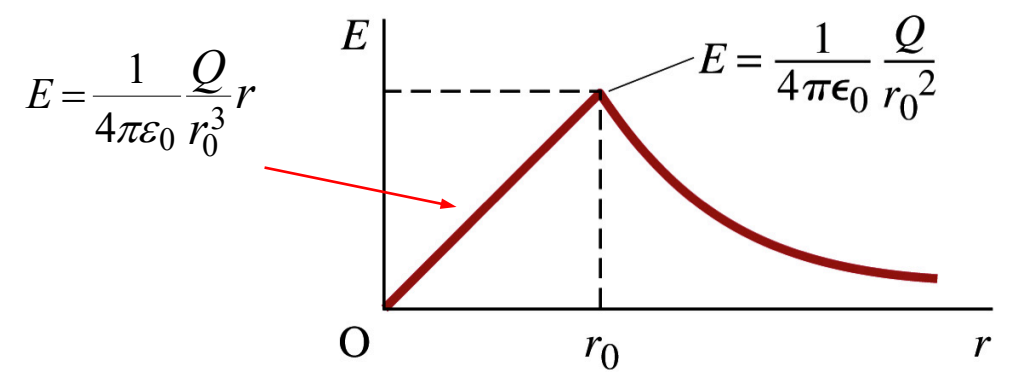
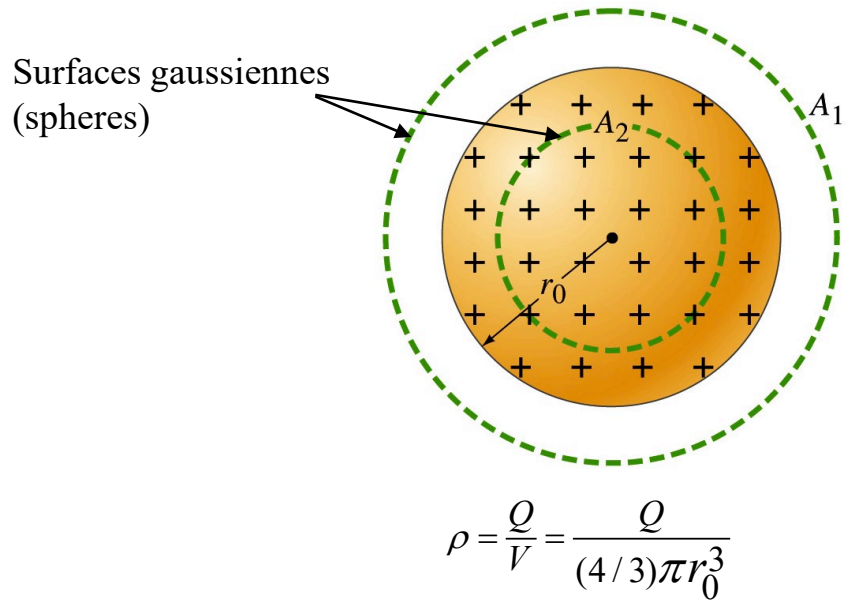
$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 0 \quad \Rightarrow E(r) = 0$$

$$r > r_0 : \quad \oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E(r) \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_1} \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$



3. Sphère isolant uniformément chargée



La symétrie du problème permet de déterminer «intuitivement» la direction du champ **E**

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (\hat{\mathbf{r}} \text{ en coord. sphériques})$$

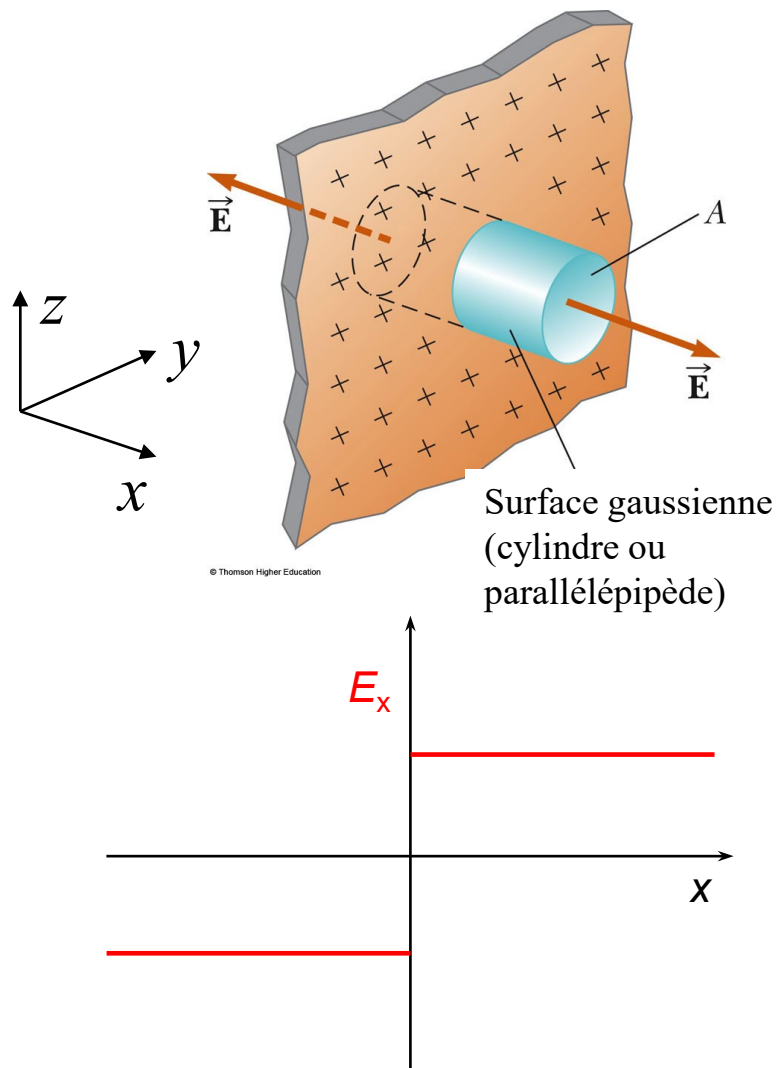
$$r < r_0 : \oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E(r) \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$r > r_0 : \oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E(r) \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_1} \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

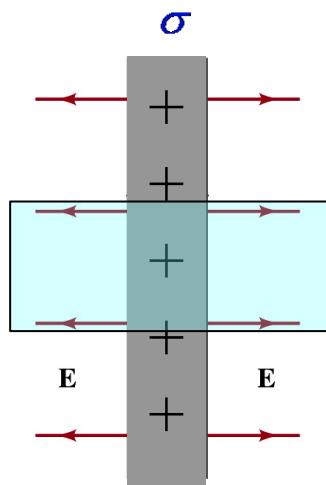
$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 & r < r_0 \\ \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r_0^3 & r > r_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho r}{3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r_0^3} & r < r_0 \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho r_0^3}{3r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > r_0 \end{cases}$$

4. Plaque mince infini isolant uniformément chargé



σ : densité de charge de surface [C/m²]



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

La symétrie du problème permet de déterminer «intuitivement» la direction du champ \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} \quad (x > 0), \quad \mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{x}} \quad (x < 0)$$

\Rightarrow

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_{\text{left}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_{\text{right}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_{\text{lateral}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\text{Sur } A_{\text{lateral}}: \mathbf{E} \perp d\mathbf{s} \Rightarrow \int_{A_{\text{lateral}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\text{Sur } A_{\text{left}}: \int_{A_{\text{left}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = EA$$

$$\text{Sur } A_{\text{right}}: \int_{A_{\text{right}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = EA$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2EA$$

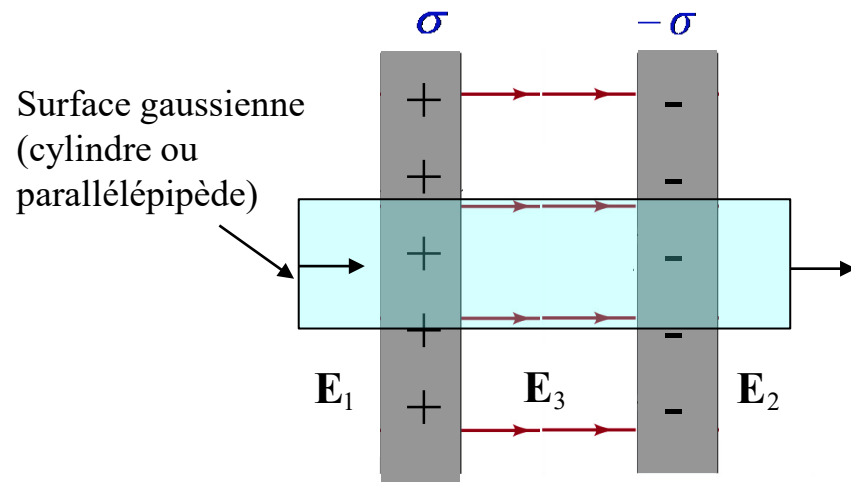
$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2EA = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x > 0)$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x < 0)$$

5. Deux plaques mince infinies isolants uniformément chargés avec charge opposée

Solution avec la loi de Gauss



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

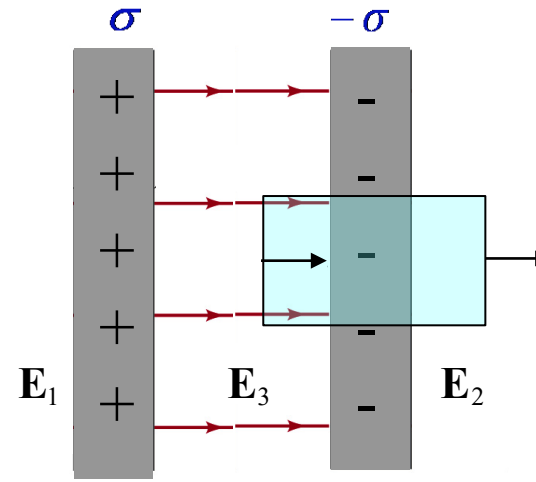
$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = 0$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -E_1 A_1 + E_2 A_2 = (-E_1 + E_2)A$$

$$\Rightarrow (-E_1 + E_2)A = 0$$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

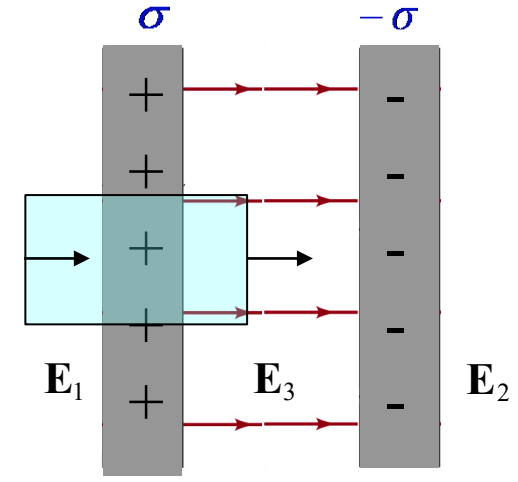
$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = -\frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -E_3 A_3 + E_2 A_2 = (-E_3 + E_2)A$$

$$\Rightarrow (-E_3 + E_2)A = -\frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -E_1 A_1 + E_3 A_3 = (-E_1 + E_3)A$$

$$\Rightarrow (-E_1 + E_3)A = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

La symétrie du problème permet de déterminer «intuitivement» la direction du champ \mathbf{E}

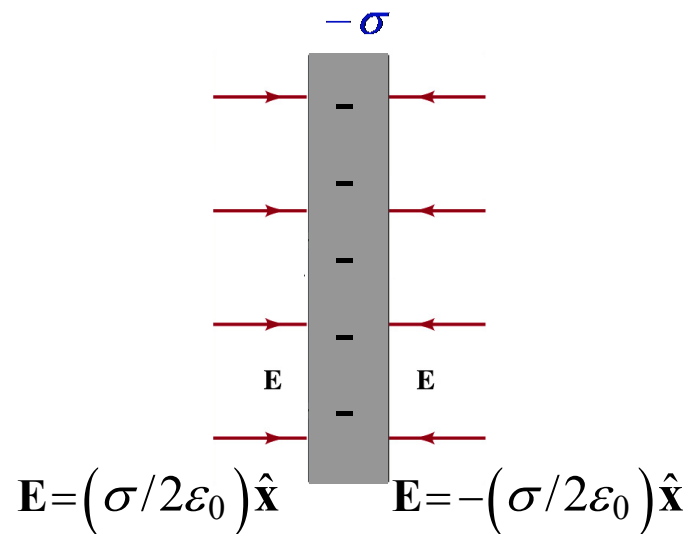
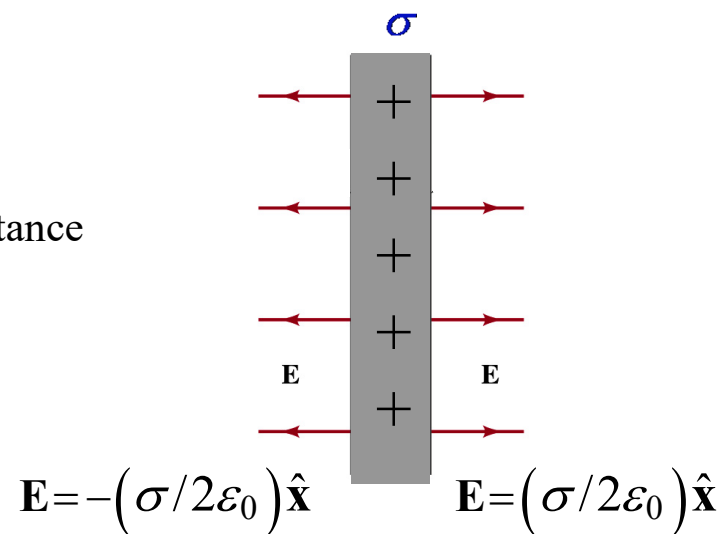
$$\Rightarrow \begin{cases} (-E_1 + E_2)A = 0 \\ (-E_3 + E_2)A = -\frac{A\sigma}{\epsilon_0} \\ (-E_1 + E_3)A = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-E_1 + E_2) = 0 \\ (-E_3 + E_2) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ (-E_1 + E_3) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = E_2 \\ E_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + E_1 \end{cases}$$

La solution est formellement indéterminée.

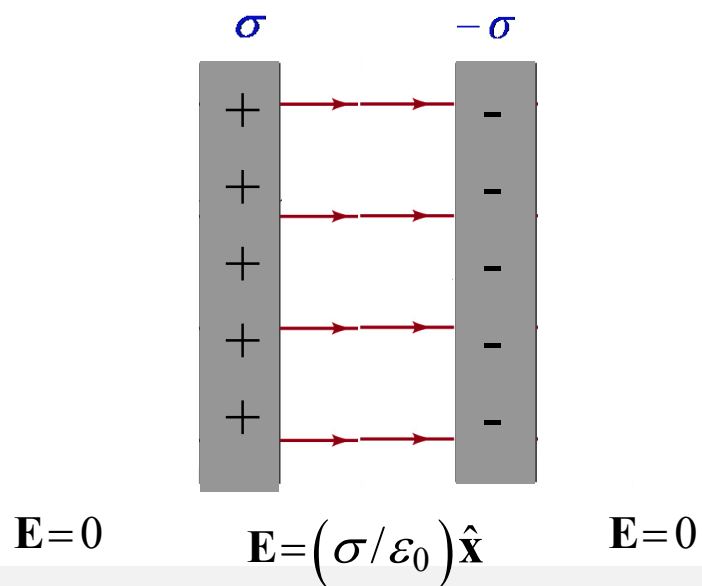
Solution avec «superposition»

Comme les plaques sont isolantes, la répartition des charges ne change pas lorsque les plaques sont rapprochées et on peut donc faire la «superposition».

Plans a distance infini



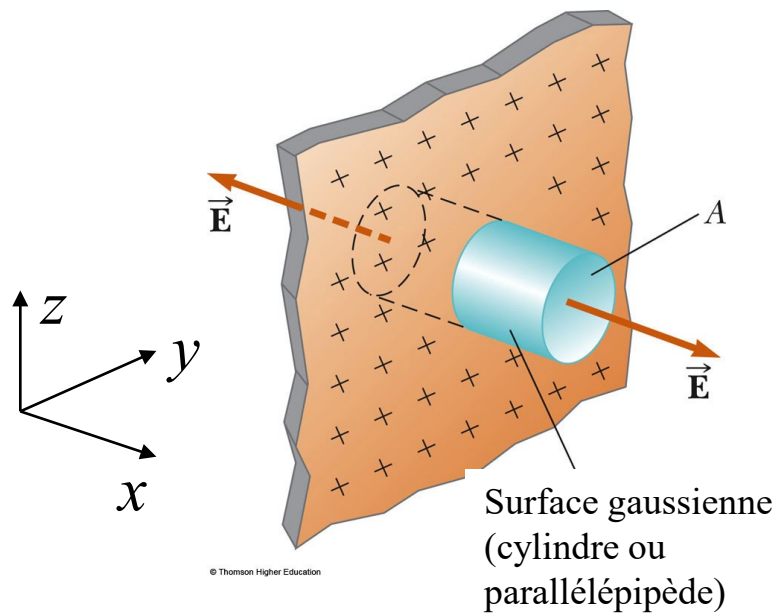
Plans a distance non-infini



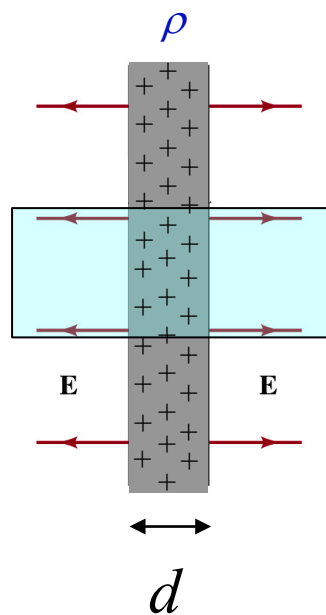
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}} \quad \text{Entre les deux plans}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{À l'extérieur}$$

5. Plaque infini isolant uniformément chargé



ρ : densité de charge de volume [C/m³]



La symétrie du problème permet de déterminer «intuitivement» la direction du champ **E**

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} \quad (x > 0), \quad \mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{x}} \quad (x < 0)$$

\Rightarrow

Pour $x > d/2$ et $x < -d/2$:

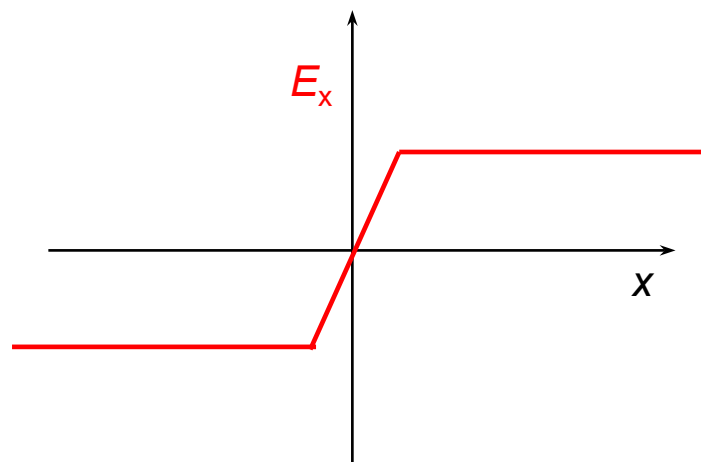
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2EA \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Ad\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2EA = \frac{Ad\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{d\rho}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x > d/2) \quad E = -\frac{d\rho}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x < -d/2)$$

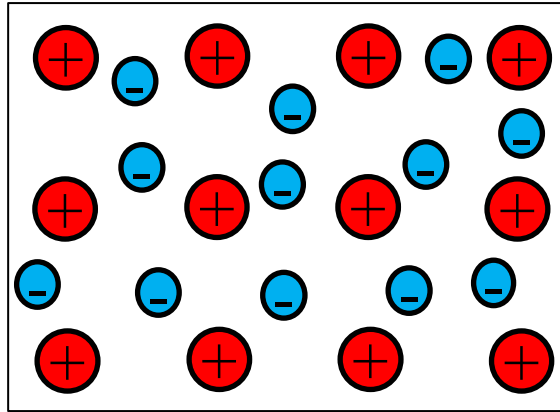
Pour $-d/2 < x < d/2$:

.....



Conducteurs et isolants: modèle microscopique approx.

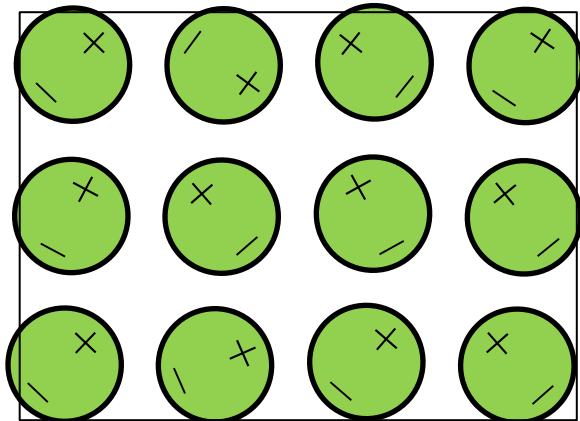
Conducteurs



Un ou plusieurs électrons par atome sont libres de se déplacer.
Exemples: cuivre, or, aluminium,...

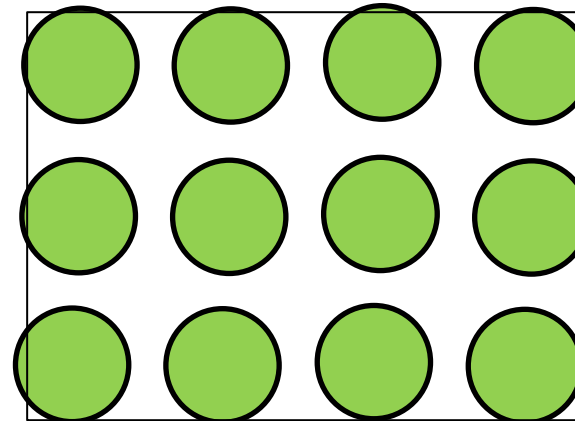
- Atome «fixe» avec manque d'électrons (ion positif)
- Electron «libre» de bouger

Isolants



- Molécule «neutre» avec dipôle électrique permanent

Tous les électrons sont sur une "courte laisse", attachée à un atome particulier.
Exemples: verre, caoutchouc, ...



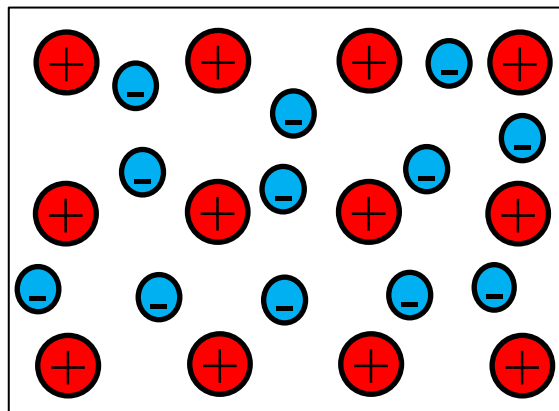
- Molécule «neutre» sans dipôle électrique permanent



Conducteurs

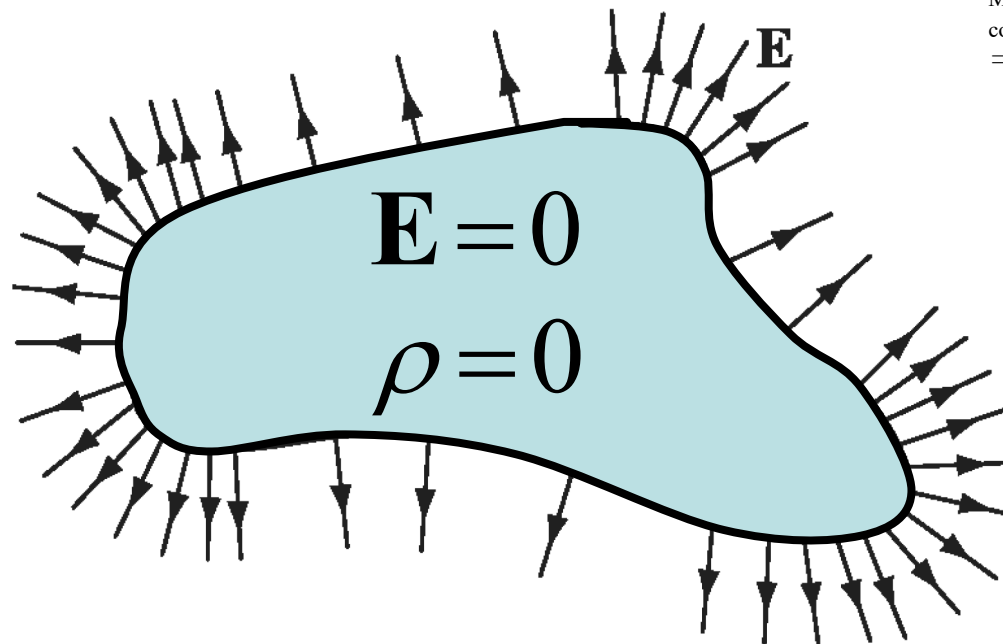
Définition de conducteur «parfait»:

En équilibre électrique (i.e., pas de mouvement des charges), dans un **conducteur parfait** (neutre ou chargé) le champ électrique macroscopique (et la densité de charge totale macroscopique) sont nuls partout à l'**intérieur** de son volume:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=0 \text{ et } \rho(\mathbf{r})=0 \quad \forall \mathbf{r} \text{ à l'intérieur du conducteur}$$



-  Atome «fixe» avec manque d'électrons (ion positif)
-  Electron «libre» de bouger



Note: $\rho(\mathbf{r})=0$ dans un conducteur parfait est une conséquence de l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$.
 Démonstration:
 Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$
 conducteur parfait: $\mathbf{E} = 0$
 $\Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = 0$

Note: Par champ électrique à l'intérieur de la matière, on entend un champ moyenné sur une grande région par rapport aux détails de la structure de l'atome (un champ électrique très fort existe dans toute la matière, y compris les bons conducteurs, si on cherche à petite échelle près du noyau atomique, voir P 127).

Notes :

Dans un conducteur parfait en équilibre électrique:

1. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r}$ à l'intérieur du conducteur, mais pas nécessairement à la surface du conducteur.
2. $\rho=0 \quad \forall \mathbf{r}$ à l'intérieur du conducteur, mais pas nécessairement à la surface du conducteur.
3. Juste à l'extérieur du conducteur, \mathbf{E} est perpendiculaire à la surface du conducteur, sinon la charge coulerait à la surface due à la force de Lorentz. Avec \mathbf{E} perpendiculaire, la charge ne peut pas bouger car elle est confinée à rester à l'intérieur du conducteur.

Théorèmes de l'équipotentiel et de Thomson

Dans un conducteur parfait en équilibre électrique:

$$V(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad \forall \mathbf{r} \text{ du conducteur}$$

Equipotentiel

Démonstration:

$\mathbf{E} = -\nabla \cdot V$ et $\mathbf{E} = 0 \quad \forall \mathbf{r}$ à l'intérieur du conducteur $\Rightarrow V(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad \forall \mathbf{r}$ à l'intérieur du conducteur

Pour un conducteur de forme et de taille fixes,
les charges se répartiront à la surface du conducteur
de manière à minimiser l'énergie potentielle du système.

Thomson



Démonstration:

Compliquée....

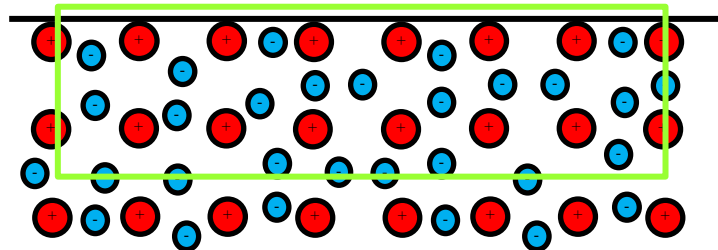
Charges en surface d'un conducteur

Les charges «en excès» sont sur une couche très mince (quelques couches atomiques) en surface du conducteur.

Note: les charges sur la surface d'un conducteur sont des charges «libres».

-  Atome «fixe» avec manque d'électrons (ion positif)
-  Electron «libre» de bouger

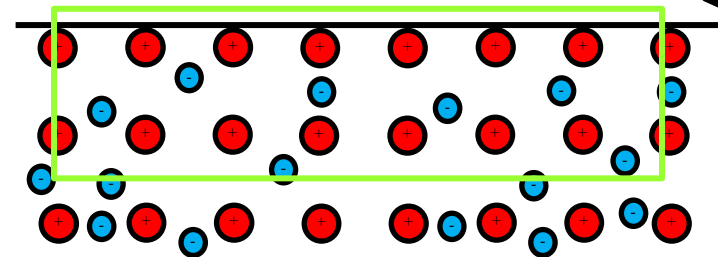
À la surface, la densité de charge des électrons est égale à celle des ions.



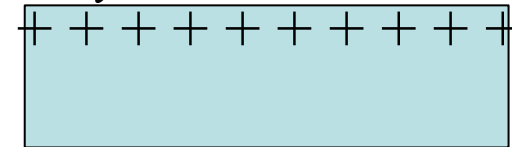
$$\sum_i q_i / V_S \cong 0$$



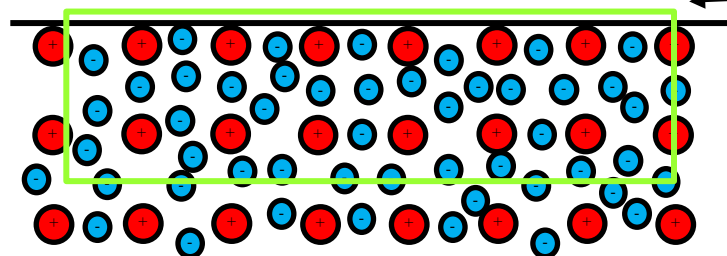
À la surface, la densité de charge des électrons est inférieure (en module) à celle des ions.



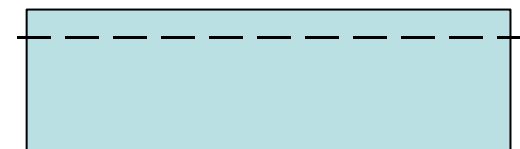
$$\sum_i q_i / V_S > 0$$



À la surface, la densité de charge des électrons est supérieure (en module) à celle des ions.



$$\sum_i q_i / V_S < 0$$



Champ à la surface d'un conducteur chargé de forme arbitraire

Maxwell equation (forme integrale): $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$

Dans le vide et dans le conducteur: $\rho = 0$ (sauf en surface)

Conducteur avec densité de charge libres en surface σ

Dans le conducteur: $\mathbf{E} = 0$

Dans le vide, en proximitè de la surface du conducteur: $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ ($E_{1,t} = E_{2,t}$, voir semaine 4)

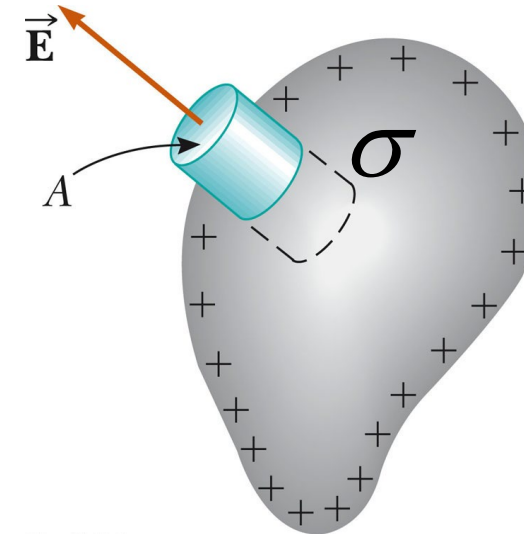
\Rightarrow

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho dV / \epsilon_0 \Rightarrow$$

$$EA = \sigma A / \epsilon_0 \Rightarrow$$

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

↖ Même résultat, sauf facteur 2, que le plan infini chargé.



Répartition des charges libre sur un conducteur chargé

Dans un conducteur «chargé», la force de Coulomb $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ réarrange les électrons tel que à l'**intérieur** du volume du conducteur:

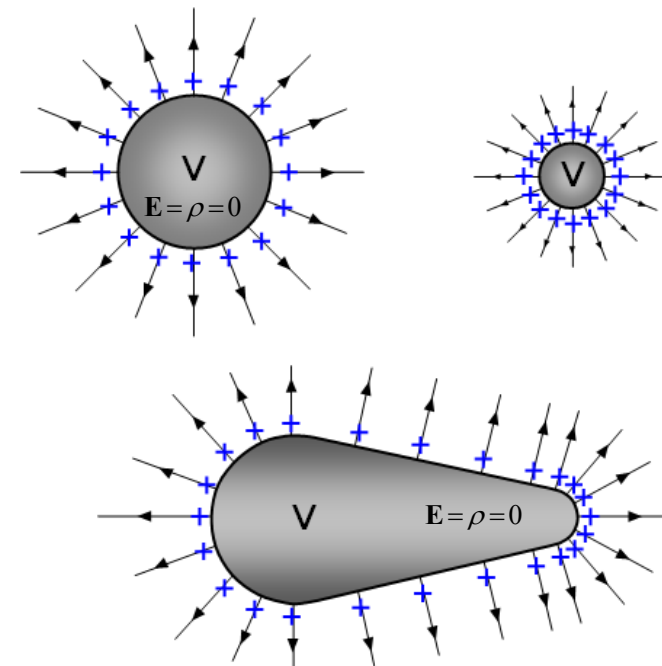
$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=0 \text{ et } \rho(\mathbf{r})=0$$

et sur la **surface** du conducteur :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})\neq 0; \quad \sigma(\mathbf{r})\neq 0$$

Note: Il est en quelque sorte étonnant que la charge d'un conducteur soit entièrement à sa surface.

En raison de leur répulsion mutuelle, les charges s'étendent naturellement autant que possible, mais pour tous d'aller à la surface semble être un gaspillage de l'espace intérieur. Eh bien, ce n'est tout simplement pas le cas. Il est préférable de mettre toute la charge sur la surface, et cela quelle que soit la taille ou la forme du conducteur. La charge sur un conducteur cherchera la configuration qui minimise son énergie potentielle. L' énergie électrostatique d'un objet solide est minime lorsque cette charge est répartie sur sa surface.



Conducteur "neutre": $\sum_i (q_{i+} + q_{i-}) = 0$

Conducteur "chargé": $\sum_i (q_{i+} + q_{i-}) \neq 0$

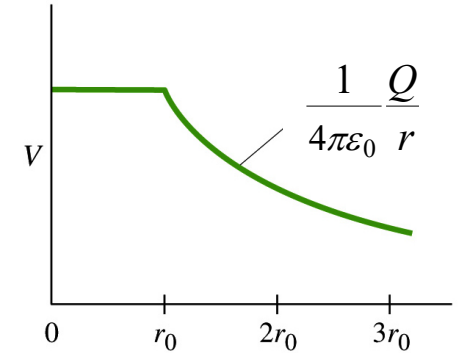
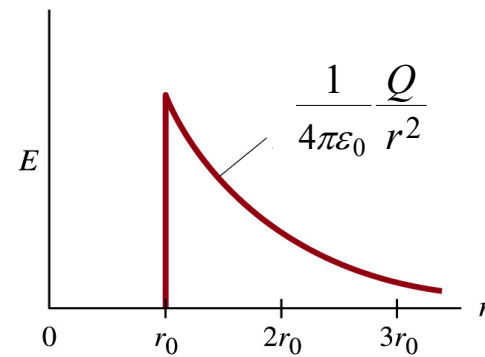
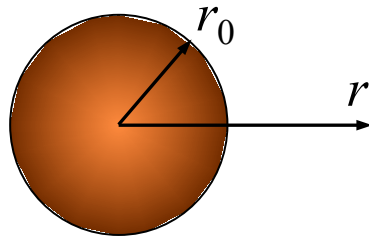
q_{i+} : charge positive dans le volume V

q_{i-} : charge négative dans le volume V

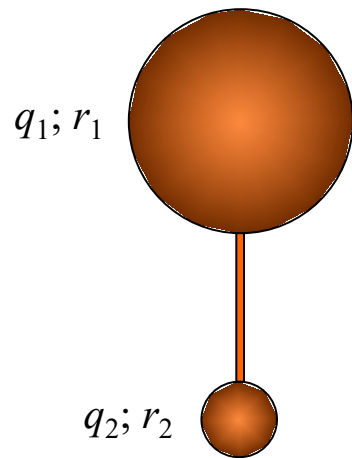
Effet de pointe (champ E plus fort en proximité de la pointe):

«demonstration» par un cas simple de deux sphères conductrices chargées de différent diamètre

Charge Q sur sphere conductrice:



Charge $Q=q_1+q_2$ sur deux spheres conductrices de different diametre:



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}$$

mais les spheres sont connectées ensemble donc $V_1 = V_2 = V$ (théor. de Thomson)

$$E_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{V}{r_1}; \quad E_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} = \frac{V}{r_2}$$

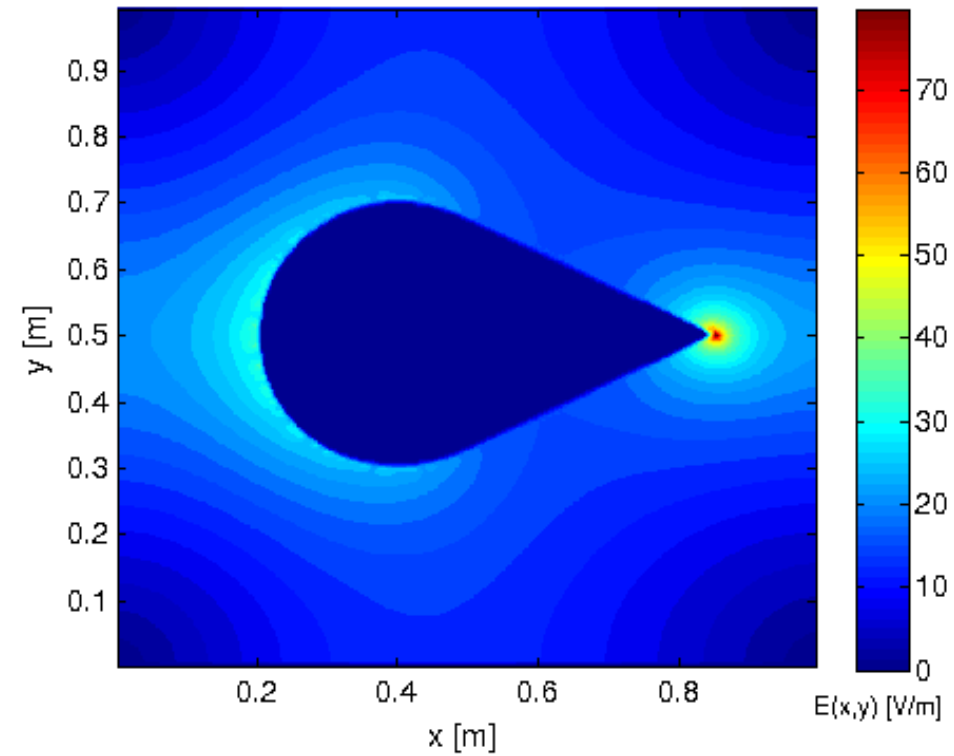
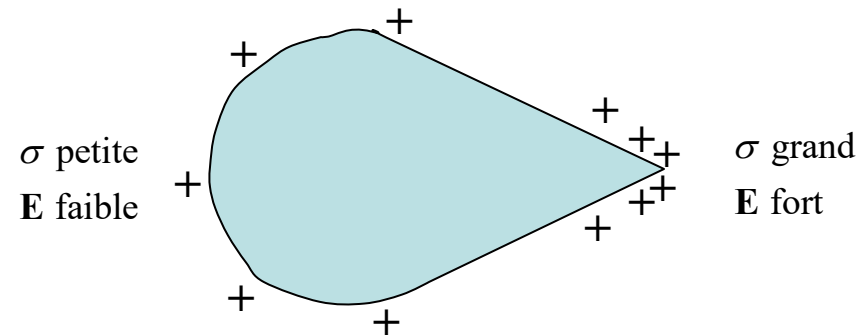
\Rightarrow

$$\frac{E_2(r_2)}{E_1(r_1)} = \frac{r_1}{r_2} \quad \Rightarrow \quad E_2(r_2) > E_1(r_1)$$

mais:

$$E_1(r_1) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}; \quad E_2(r_2) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 > \sigma_1$$

Exemple: conducteur chargé



La charge est répartie de manière inégale sur la surface. La densité de charge est plus importante là où le rayon de courbure est le plus petit. La charge à l'intérieur du conducteur et le champ électrique à l'intérieur du conducteur sont nuls. À l'extérieur du conducteur, le champ électrique est maximal près de la surface où la densité de charge est la plus grande.

«Induction» électrostatique: Conducteurs neutres dans un champ statique \mathbf{E} externe

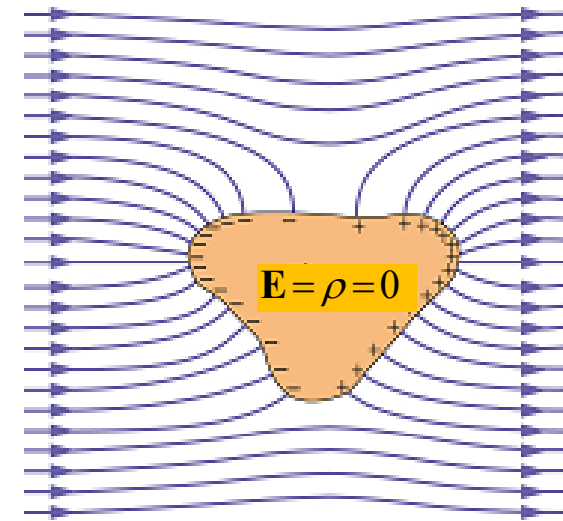
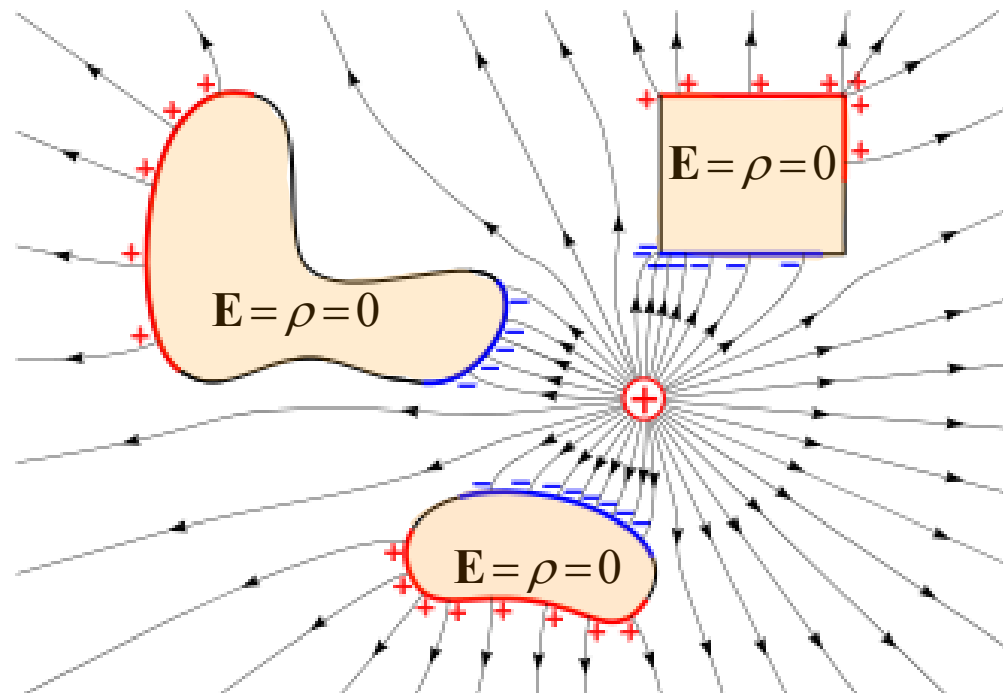
En présence d'un champ électrique statique **externe**, la force de Coulomb $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ «réarrange» les électrons du conducteur tel que à l'**intérieur** du volume du conducteur:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=0 \text{ et } \rho(\mathbf{r})=0$$

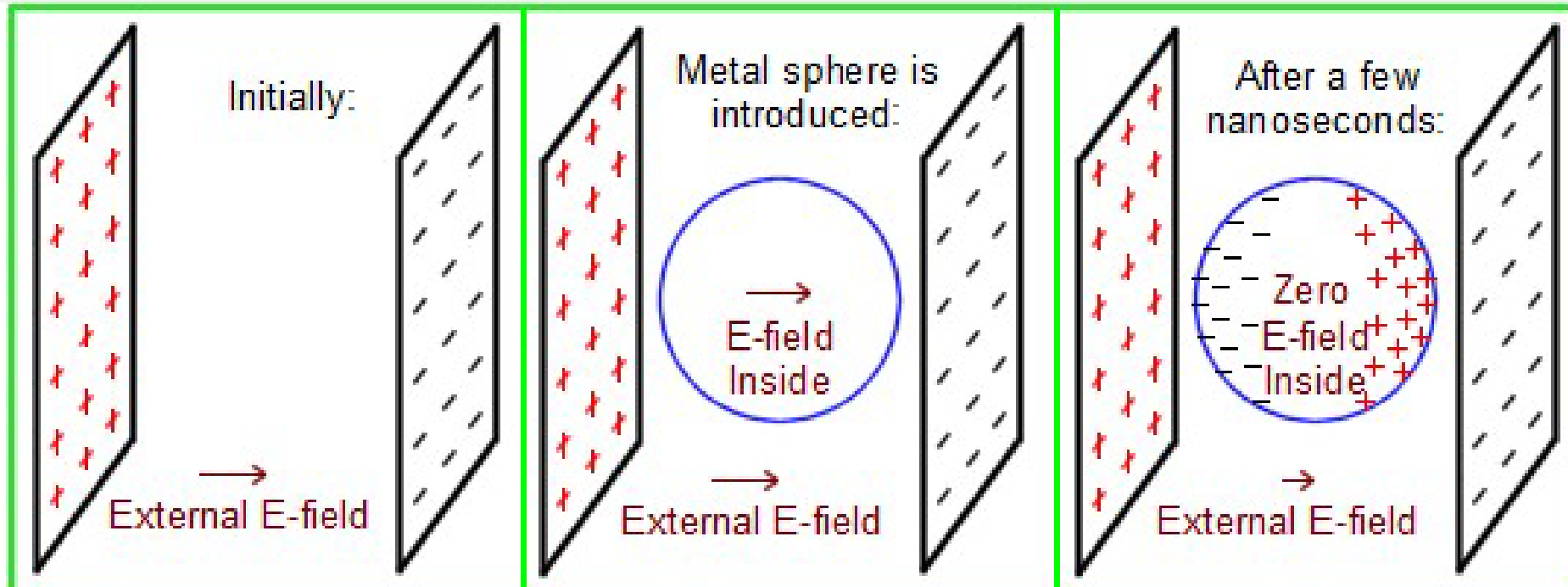
En général, sur la **surface** du conducteur:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})\neq 0; \quad \sigma(\mathbf{r})\neq 0$$

Les charges à la surface du conducteur créent un champ électrique égal en amplitude et opposé en direction au champ électrique externe, de manière à rendre le champ total à l'intérieur nul.



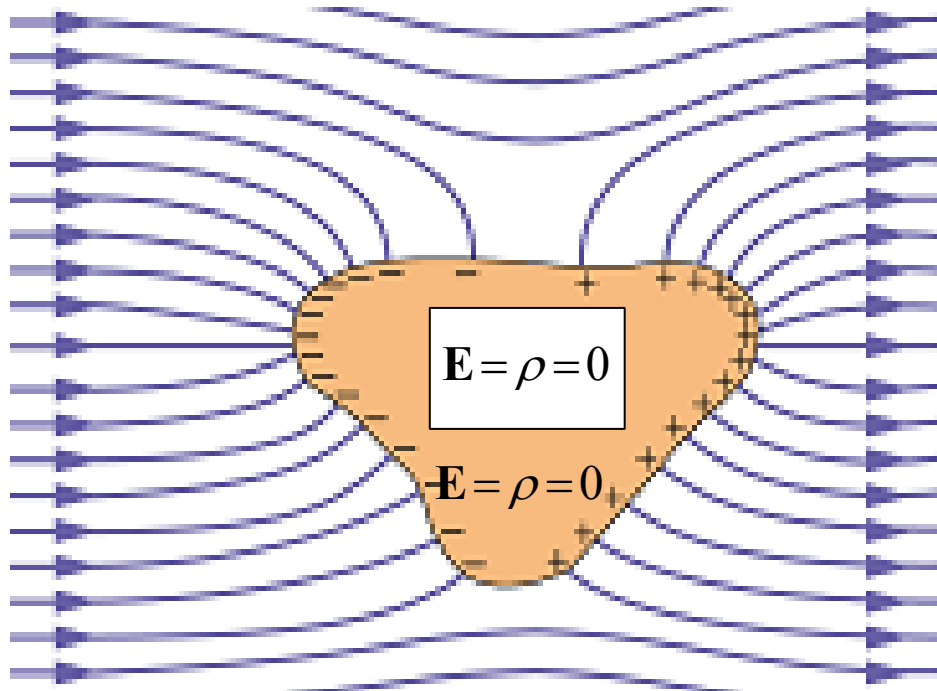
Conditions		Conséquences					
Conducteur «parfait»	Champ appliqué de l'extérieur \mathbf{E}_{ext}	ρ à l'intérieur	\mathbf{E} à l'intérieur	ρ en surface	\mathbf{E} en surface	ρ à l'extérieur	\mathbf{E} à l'extérieur
Neutre	0	0	0	0	0	0	0
Neutre	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Chargé	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Chargé	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$



- 1) Un objet métallique neutre est introduit dans un champ électrique uniforme.
- 2) Pendant un temps très court, le champ électrique à l'intérieur de l'objet est non nul et provoque le déplacement/réarrangement des électrons.
- 3) Après ce court laps de temps, le champ électrique à l'intérieur de l'objet métallique est à nouveau nul, les électrons ne bougent plus, la densité de charge à l'intérieur est nulle, la densité de charge à la surface de l'objet est non uniforme, le champ totale à l'extérieur du conducteur est différent du champ avant l'introduction de l'objet métallique.

Notes:

1. **Cage de Faraday.** Grâce à l'induction «électrostatique» (i.e., réarrangement des électrons) le champ électrique est nul dans le conducteur et à l'intérieur de la cavité du conducteur.
Le champ électrique extérieur est **écrané**.



2. Coquille métallique neutre autour d'une charge. Réarrangement des charges. Charges sur la surface intérieure et sur la surface extérieure.

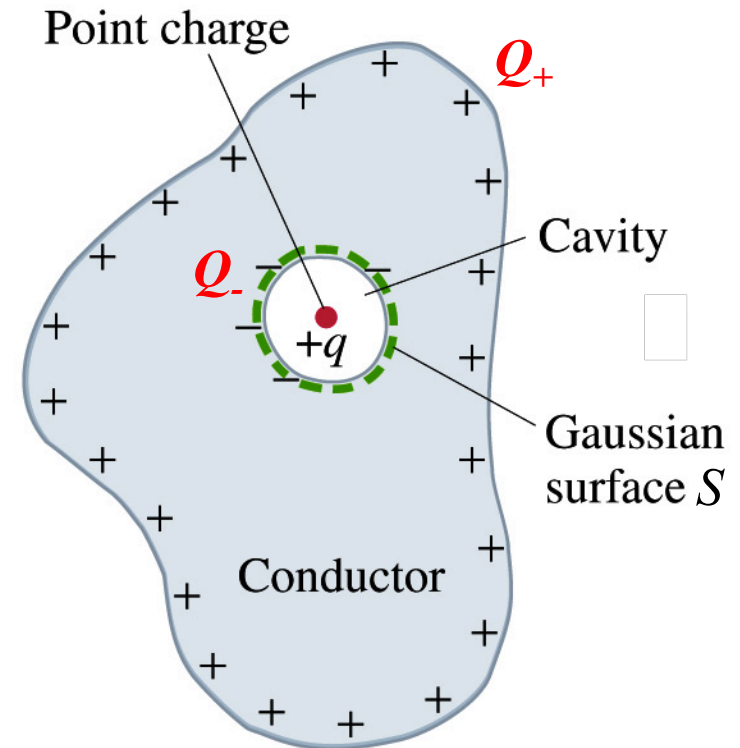
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad \text{Dans le conducteur: } \mathbf{E} = 0$$

$$\text{Conducteur neutre: } Q_- + Q_+ = 0$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_- + q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_- = -q$$

$$Q_+ = Q_-$$



Exemple simple:

Coquille sphérique métallique isolée et neutre avec charge q au centre.

- Déterminer la **charge totale induite** sur les surfaces interne et externe de la sphère.
- Déterminer la **distribution des charges induites** sur les surfaces interne et externe de la sphère. Dessiner quelques lignes de champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
- Déterminez le **champ électrique** partout.

a. $Q_+ = q = -Q_-$ (voir page précédent)

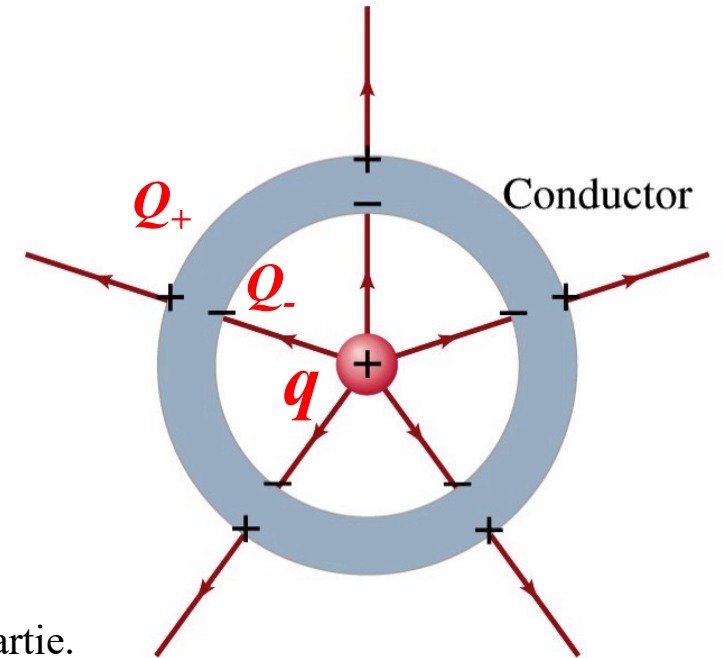
- b. En raison de la symétrie du problème, la charge est uniformément répartie.

c.
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Par symétrie: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{r}}$ (i.e., champ radiale)

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad r < r_{in} \text{ et } r > r_{out}$$

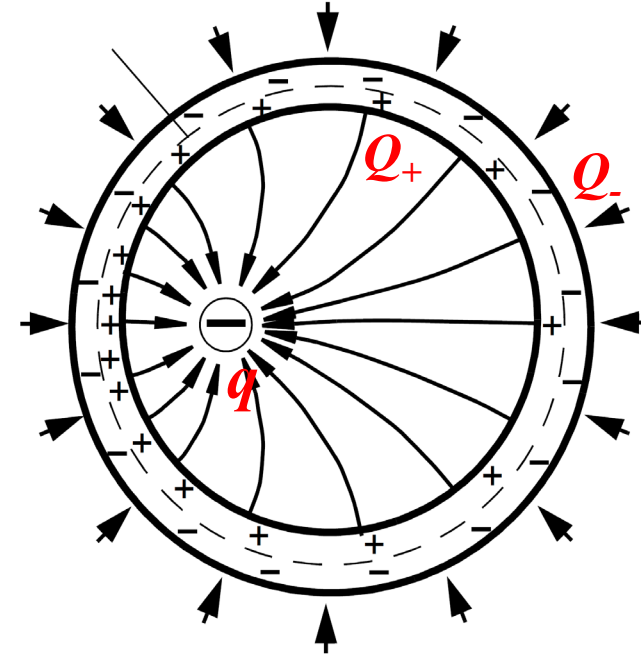
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad r_{out} > r > r_{in}$$



Exemple plus compliqué:

Coquille sphérique (i.e., sphère creuse) métallique isolée et neutre avec charge q pas placé au centre.

- Déterminer **la charge totale induite** sur les surfaces interne et externe de la sphère.
- Déterminer **la distribution des charges induites** sur les surfaces interne et externe de la sphère. Dessiner quelques lignes de champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.



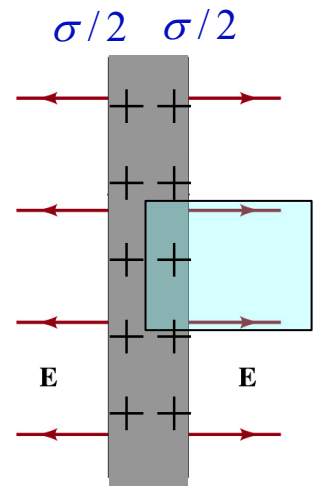
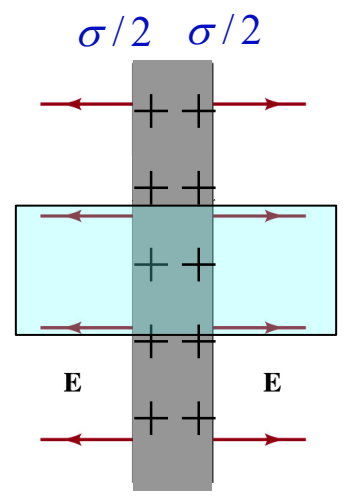
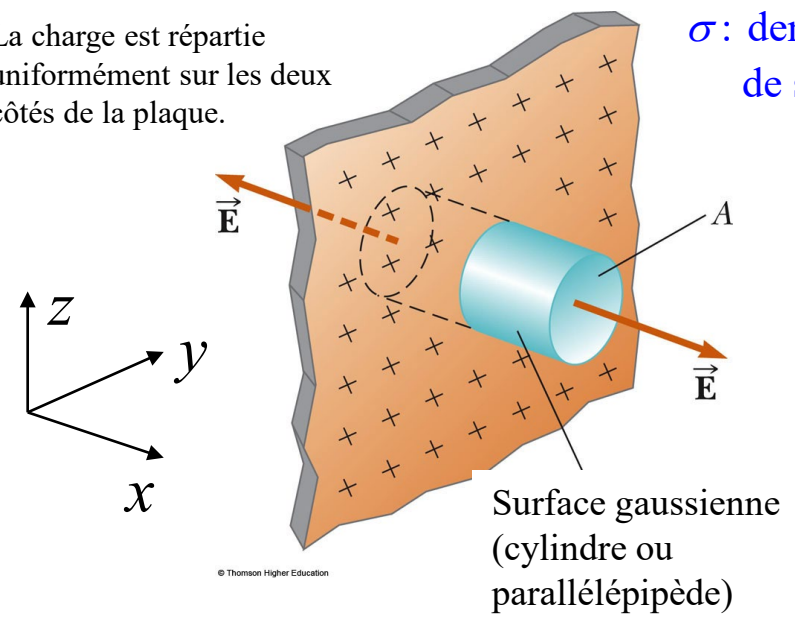
a. $Q_- = q = -Q_+$ (voir pages précédents)

b. La charge n'étant pas centrée, la distribution des charges positives n'est pas uniforme sur la paroi interne. La position d'équilibre de ces charges est obtenue lorsque la force d'attraction due à q est compensée par les forces de répulsion entre charges positives. En revanche, les charges négatives seront uniformément réparties sur la surface externe car la distribution non-homogène des charges positives de la paroi interne de la sphère ne peut pas produire un champ électrique dans la paroi, qui permettrait d'affecter la distribution de charges sur la partie externe. De plus, on sait que le champ électrique à la surface d'un conducteur est normal à la surface. Ce qui donne les lignes de champ représentées sur la figure.

3. Plaque infini métallique chargé

La charge est répartie uniformément sur les deux côtés de la plaque.

σ : densité de charge de surface [C/m²]



La symétrie du problème permet de déterminer «intuitivement» la direction du champ **E**

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} \ (x>0), \ \mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{x}} \ (x<0)$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2EA \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2EA = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x>0)$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x<0)$$

Autre solution...

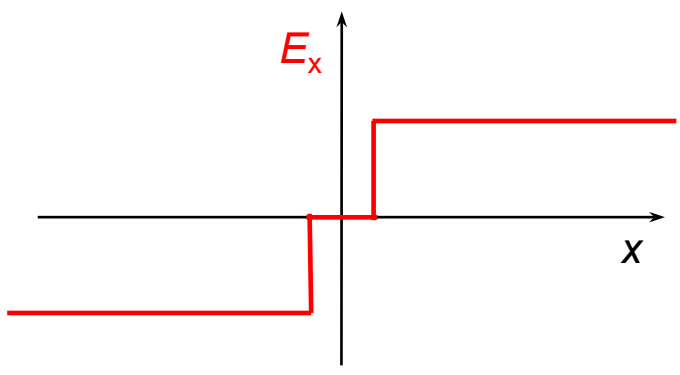
Dans le conducteur

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} \ (x>0), \ \mathbf{E} = 0 \ (x=0)$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 + EA \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{A\sigma}{2\epsilon_0}$$

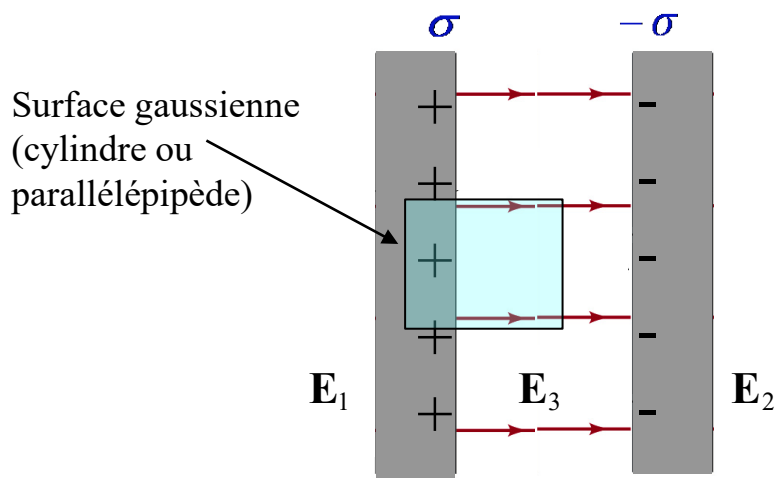
$$\Rightarrow EA = \frac{A\sigma}{2\epsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{pour } x>0)$$



4. Deux plaques mince métalliques infinies chargés avec charge opposée

Comme les plaques sont métalliques, les charges sont mobiles et se répartissent sur les plaques en raison de la force de Lorentz. Les charges sont réparties exclusivement sur la surface «intérieure» (voir la diapositive suivante)

Solution avec la loi de Gauss



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

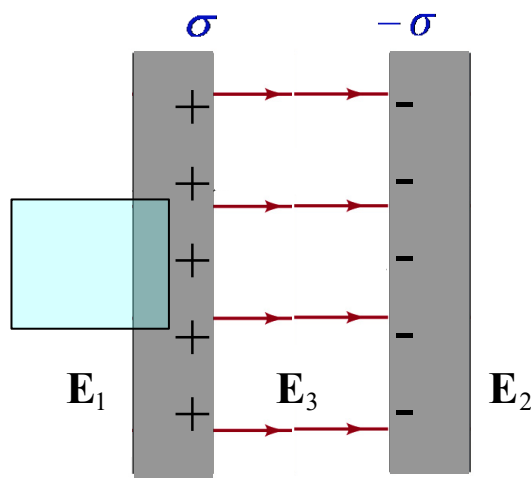
$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} =$$

$$= -E_0 A_0 + E_3 A_3 = (-E_0 + E_3)A$$

mais dans le conducteur $E_0 = 0$

$$\Rightarrow E_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = 0$$

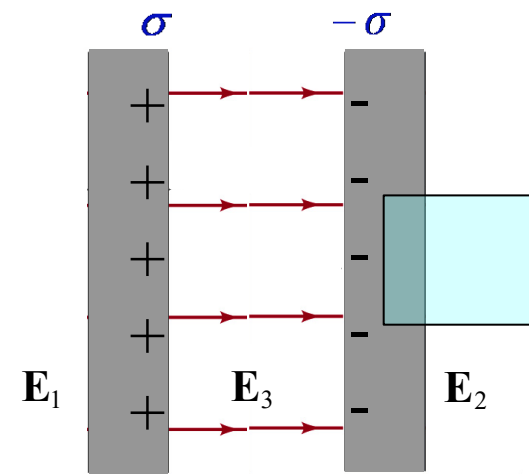
$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} =$$

$$= E_0 A_0 - E_1 A_1 = (E_0 - E_1)A$$

mais dans le conducteur $E_0 = 0$

$$\Rightarrow E_1 = 0$$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = 0$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} =$$

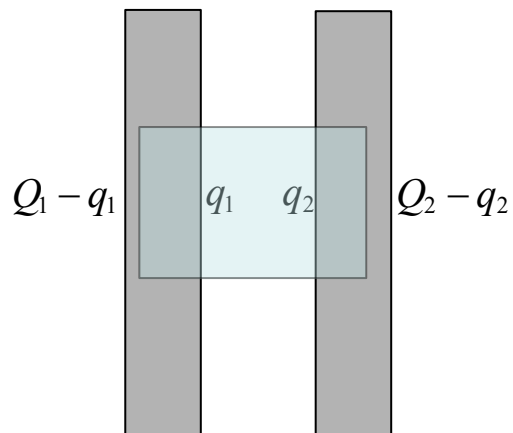
$$= -E_0 A_0 + E_2 A_2 = (-E_0 + E_2)A$$

mais dans le conducteur $E_0 = 0$

$$\Rightarrow E_2 = 0$$

Note: Distribution des charges sur deux plaques conductrices

Supposons que les plaques sont chargées avec charge Q_1 et Q_2 . Calculons la distribution des charges sur les quatre surfaces.



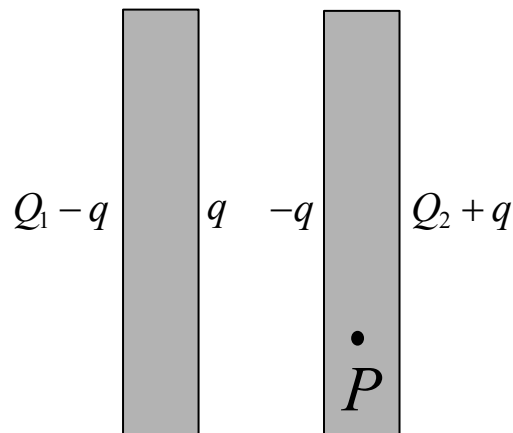
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$\mathbf{E} = 0$ dans le conducteur

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = q_1 + q_2$$

$$\Rightarrow q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = -q_2 \triangleq q$$



Par superposition:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{\epsilon_0}$$

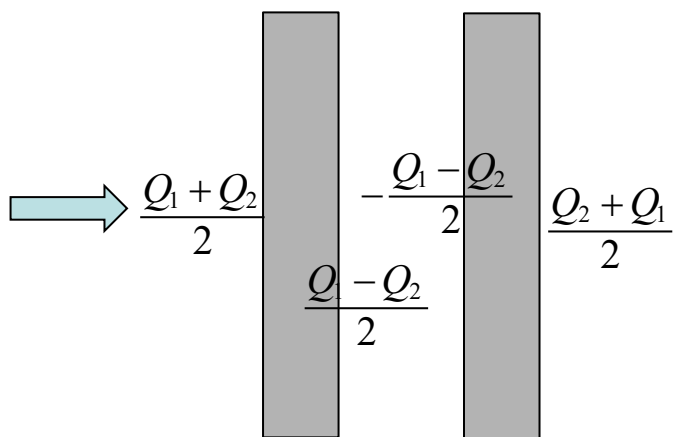
$$\Rightarrow \mathbf{E}(P) = \frac{Q_1 - q}{A\epsilon_0} + \frac{q}{A\epsilon_0} + \frac{-q}{A\epsilon_0} - \frac{Q_2 - q}{A\epsilon_0}$$

Dans un conducteur $\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}(P) = 0$

$$\Rightarrow \frac{Q_1 - q}{A\epsilon_0} + \frac{q}{A\epsilon_0} + \frac{-q}{A\epsilon_0} - \frac{Q_2 - q}{A\epsilon_0} = 0$$

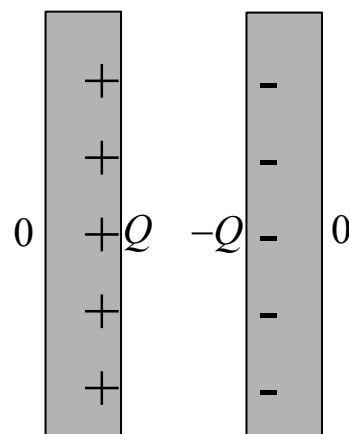
$$\Rightarrow Q_1 - q + q - q - Q_2 - q = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$



Pour

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$



Si la charge sur les deux plaques est de module égal mais de signe opposé, la charge n'est répartie que sur les parois internes.

Capacité d'un condensateur à un conducteur (auto-capacité)

Soit V le potentiel d'un conducteur isolé de volume Ω , de surface S , et de charge Q .

Le potentiel V dans le volume d'un conducteur parfait est uniforme (théorème de l'équipotentiel).

$$V(\mathbf{r}) = V\tilde{V}(\mathbf{r}) \text{ avec } \begin{cases} \tilde{V}(\mathbf{r} \in \Omega) = 1 \\ \tilde{V}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{Loi de Gauss: } \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q / \varepsilon_0 \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

\Rightarrow

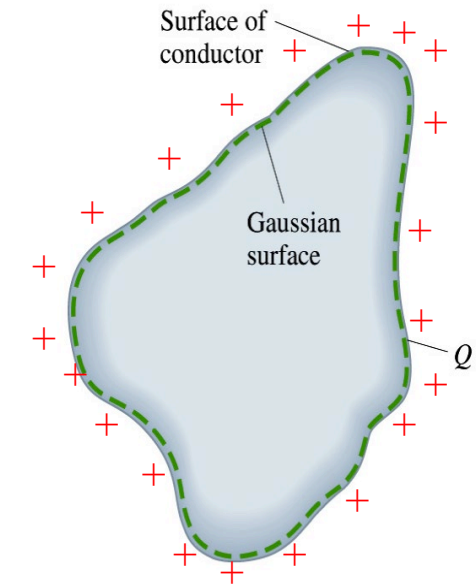
$$Q = \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\varepsilon_0 \oint_S \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\varepsilon_0 V \oint_S \nabla \tilde{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

La proportionnalité de Q à V conduit à définir une quantité purement géométrique appelée auto-capacité:

$$C \equiv \frac{Q}{V} = -\varepsilon_0 \oint_S \nabla \tilde{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

Q : charge totale sur le conducteur

V : différence de potentielle entre le conducteur et une surface conductrice à l'infini.



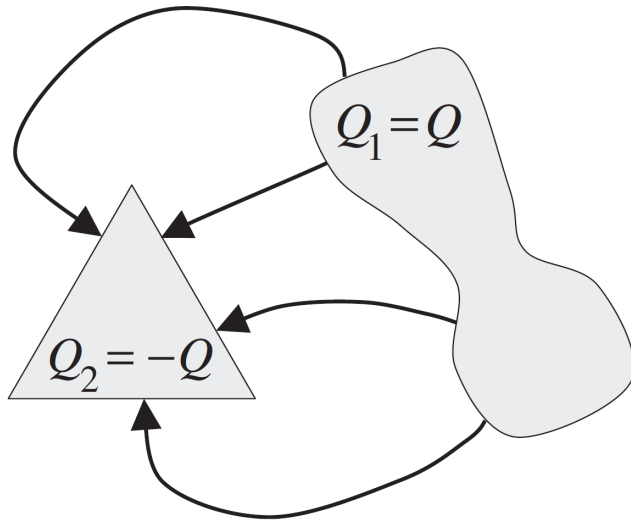
Capacité d'un condensateur à deux conducteurs (capacité mutuelle)

La capacité d'un condensateur à deux conducteurs est aussi une quantité purement géométrique définie comme:

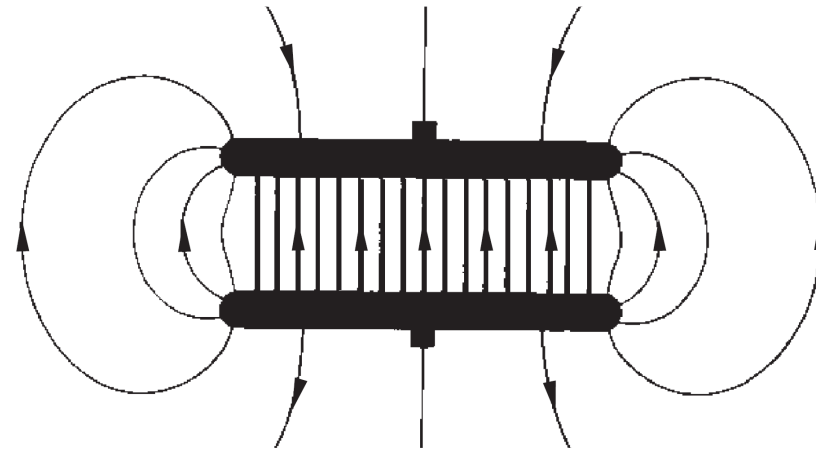
$$C \equiv \frac{Q}{V}$$

Q : charge totale sur un des deux conducteurs

V : différence de potentielle entre les deux conducteurs



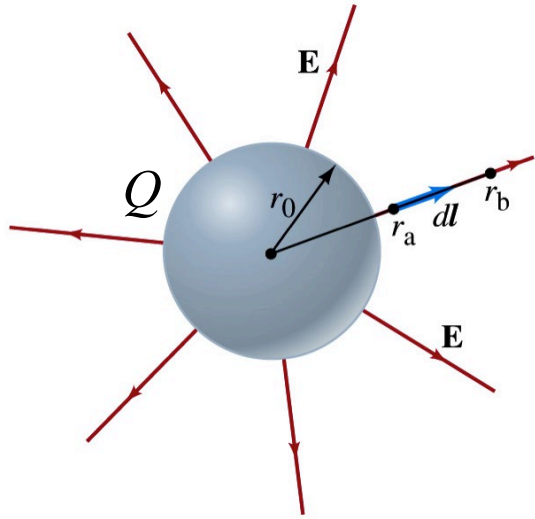
Condensateur à deux conducteurs générique



Condensateur à deux conducteurs à plaques parallèles

Note: Plus tard dans le cours, nous discuterons aussi de la capacité des N conducteurs (matrice de capacité)

Exemple 1. Capacité d'un condensateur à un conducteur: sphère conductrice

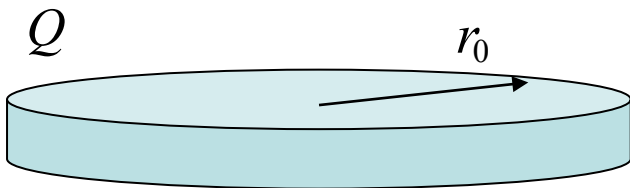


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{CV}{r_0} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 r_0$$

(démonstration dans les diapositives précédentes)

$r_0 = 10 \mu\text{m}$	$\Rightarrow C \cong 10^{-15} \text{F} = 1 \text{fF}$
$r_0 = 1 \text{mm}$	$\Rightarrow C \cong 10^{-13} \text{F} = 0.1 \text{pF}$
$r_0 = 1 \text{m}$	$\Rightarrow C \cong 10^{-10} \text{F}$
$r_0 = 6.3 \times 10^6 \text{m}$	$\Rightarrow C \cong 10^{-3} \text{F}$ (capacité de la terre)

Exemple 2. Capacité d'un condensateur à un conducteur: disque mince conducteur avec radius r_0



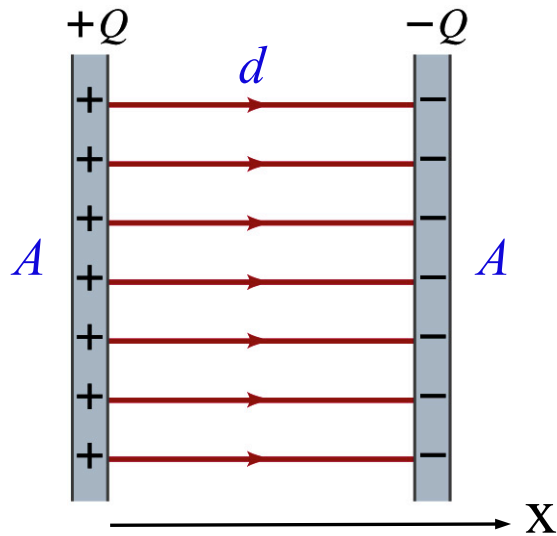
Le potentiel V est constant sur le disque (theoreme de Thomson)

mais la densité de charge n'est pas uniforme, donc le calcul du potentiel n'est pas simple.

Sans démonstration:

$$V = \frac{Q}{8\epsilon_0 r_0} = \frac{CV}{8\epsilon_0 r_0} \Rightarrow C = 8\epsilon_0 r_0$$

Exemple 3. Capacité d'un condensateur à deux conducteurs à plaques parallèles



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}; \quad V(x) - V(0) = -\int_0^x E dx = -\frac{Q}{A\epsilon_0} x; \quad 0 \leq x \leq d$$

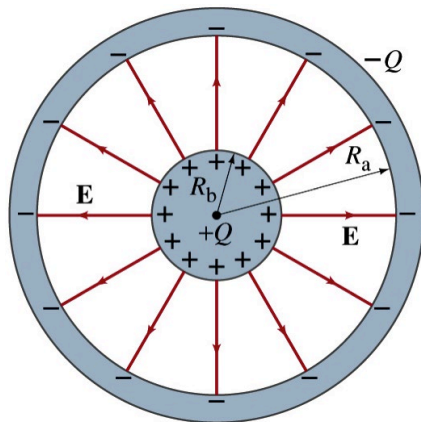
\Rightarrow

$$\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d \quad \text{mais } C \equiv \frac{Q}{V}$$

\Rightarrow

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Exemple 4. Capacité d'un condensateur à deux conducteurs «sphérique»



$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad R_b < r < R_a \quad \Rightarrow$$

$$V(r) - V(R_a) = -\int_{R_a}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_a} \right) \quad R_b < r < R_a$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right) \quad \text{mais } C \equiv \frac{Q}{V}$$

\Rightarrow

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_a R_b}{R_a - R_b}$$